

渦を有するボーズ・アインシュタイン凝縮体の臨界原子数

大田 彰^{*1,†}

(平成24年1月12日 受理)

Critical Number of Atoms of Bose-Einstein Condensates including Vortices

Akira OHTA

[†]E-mail of corresponding author: ohata@photon.jst.go.jp

Bose-Einstein condensates including vortices are very interesting physical objects. In case of BEC not including vortices, one of the remarkable differences between attractive BEC and repulsive BEC is whether critical number of atoms exists or not. The critical number of atoms N_c exists in attractive BEC. And, if the number of atoms N is larger than N_c , the attractive BEC cannot keep itself stably and collapses. N_c does not exist in repulsive BEC. However, it has not been clarified whether such N_c exists or not in BEC including vortices. In this paper, we try to determine N_c of BEC including vortices by the theoretical analysis of the minimal energy state, and obtain the expressions of N_c . These show clearly that critical number of atoms exists in not only attractive BEC but also repulsive one.

Key words: *Bose-Einstein condensates, Vortices, Critical number of atoms, Collapse,*

1. 緒言

それまで理論上のものに過ぎないと思われていたボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) が、1995年に Wieman, Cornell, Ketterle の実験によって⁸⁷Rb 希薄気体で実現して以来、量子力学的状態を可視化できる物理系として重要な研究対象となった。BECは原子間相互作用が斥力のもの (斥力BEC) と引力のもの (引力BEC) があり性質が異なる。大きな違いの一つは、斥力BECは構成原子数 N に制約がないのに対し、引力BECには或る原子数を超えるとエネルギー的に安定な状態が存在しなくなる臨界原子数 N_c が存在することである。渦を有しない引力BECの臨界原子数は概ね $N_c \approx R/|a|$ のオーダーであることが報告¹⁾ されている。ここに、 R は凝縮体の大きさを代表する長さで、 a は原子間相互作用の散乱長である。斥力相互作用では $a>0$ 、引力相互作用では $a<0$ になる。この違いは定性的には次のように理解することができる。渦無しBECのエネルギー ε を例えば上記代表寸法 R に着目して関数 $\varepsilon(R)$ と見ると、斥力BECでは原子数 N の値に関わらず $0<R<\infty$ の範囲に少なくとも1個の極小値が存在し、その状態で安定する。

これは、 $R \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ の両方の極限で $\varepsilon(R) \rightarrow \infty$ となるような式の形をしていることから明白である。これに対して、引力BECは必ずしもそうとは限らない。場合によっては極小値が存在せず、安定した状態を保つことができなくなってしまうことがある。これは式の形が $R \rightarrow \infty$ の極限では $\varepsilon(R) \rightarrow \infty$ となる一方、 $R \rightarrow 0$ では逆に $\varepsilon(R) \rightarrow -\infty$ となるような形をしていることによる。そして、こうした極小値の有無を分ける要素の一つが原子数 N なのである。以上は渦無しBECに関する議論であるが、これに渦が加わると更に状況が複雑化する。斥力BECだろうが引力BECだろうが角運動量が付与されると当然のことに渦が発生し、その形態は初期の時点では似たようなものである。しかし、時間経過に伴う渦形態の変化の様子には違いがあり、これらについて色々な報告がある。特に渦を系の中心に持つ引力BECが崩壊に至ることを示した報告²⁾ は興味深い。では、こうした渦を有するBECの臨界原子数はどうなるであろうか? これについてはさしたる報告があまり見当たらないのが実情である。渦の無い状態に渦を付加すると角運動量に伴う回転運動のエネルギー (以下ではこれを角運動エネルギーと呼ぶ) が新たに加わるわけであるから、もともと臨界原子数の存在する引力BECでも当然その値は変化するであろう。更に顕著な

*1 量子プロセス理工学専攻博士課程
(現在 (独) 科学技術振興機構)

のは斥力BECのエネルギー曲線の変化である。予備的な解析によって、渦無し引力BECの曲線に似た形に変わることが推測される。これは斥力BECでも渦が有る場合には臨界原子数が存在する可能性を示唆するものであると言える。著者はこうした変化に着目した。そして次の2点を到達目標としてエネルギー曲線の解析を試み、一応の結果を得た。①渦を有する引力BECの臨界原子数の近似式の導出。②渦を有する斥力BECに臨界原子数が存在するか否かの議論に資する解析結果の提供。

以下、これらについて報告する。

2. 解析

解析の出発点とした式と計算過程における若干の式、及び最終結果の式を示す。出発点としたのは次の時間変数を含むグロス・ピタエフスキー方程式である。

$$i \frac{\partial \Psi(\rho, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{1}{2} \nabla^2 + V(\rho) + U_0 |\Psi(\rho, t)|^2 - \Omega L_z \right\} \Psi(\rho, t) \quad (1)$$

BECの形状：高さが有限の円筒対称形を想定。円筒の底面に xy 座標を設定する。 $V(\rho)$ ：半径 R の等方的2次元調和振動子型トラップ・ポテンシャル。 U_0 ：原子間相互作用に関する物理量「有効相互作用」 $U_0 > 0$ なら斥力作用、 $U_0 < 0$ なら引力作用。 L_z ：角運動量演算子。 Ω ：角速度。（この式はコンピュータ・シミュレーションによく用いられる形式になっていて、質量、長さ、時間の各ディメンションについて無次元化されている。）ただ、この非線型項を含む微分方程式を正面から解析的に解くことはほとんど不可能である。そこで具体的には右辺のハミルトニアン固有値を近似的に求めることからスタートした。そのためには先ず渦が作る速度場の角運動エネルギーを知らなければならない。このエネルギー及び角運動量は次ようになる。

（尚、以下の式は各係数に現れる物理量を明確に示すことを重視して、無次元化は行っていない。）

円筒形のBECにおいて渦芯が xy 面内で系の中心軸から距離 b の位置にある循環量子数 l の渦1個が作る速度場の原子1個当たりの角運動エネルギー：

$$\varepsilon_v(l, 1) = \frac{\hbar^2 l^2}{m R^2} \ln \left\{ \frac{R}{\xi} \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right) \right\} \quad (2)$$

ξ は渦芯にできる空隙（原子の存在しない領域）の半径で $\xi \ll R$ である。本論文では定数として扱う。

上記渦が作る速度場の原子1個当たりの角運動量：

$$\mathcal{L}(l, 1) = l \hbar \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right) \quad (3)$$

《注》これら(2)式、(3)式は文献3)に示されているが本論文のオリジナルではない。

循環量子数1の渦 l 個が xy 面内の極座標 (b_i, θ_i) ($i=1, 2, \dots, l$)に存在する時、渦全体が作る速度場の原子1個当たりの角運動エネルギー：

$$\varepsilon_v(1, l) = \frac{\hbar^2}{m R^2} \left[\sum_{i=1}^l \ln \left\{ \frac{R}{\xi} \left(1 - \frac{b_i^2}{R^2} \right) \right\} + \sum_{i < j} \left\langle \ln \left\{ \frac{R}{d_{ij}} \left(1 - \frac{b_i^2}{R^2} \right) \right\} + \ln \left\{ \frac{R}{d_{ij}} \left(1 - \frac{b_j^2}{R^2} \right) \right\} \right\rangle \right] + C_0 \quad (4)$$

$$d_{ij} = \sqrt{b_i^2 + b_j^2 - 2b_i b_j \cos \theta_{ij}}$$

$$\theta_{ij} = |\theta_i - \theta_j|$$

C_0 は定数 (b_i, b_j を含まない項)

BECのエネルギー中の他の要素は比較的簡単な考察から近似値を求めることができる。(2)式を導いたのと同じ条件下にあるBECの全エネルギーの原子1個当たりの近似値を ε とすれば ε はそれら他要素および(2)式の総和として次のように得られる。

$$\frac{m}{\hbar^2} \varepsilon = \frac{1}{2R^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 R^2 + \frac{Na}{R^3} + \frac{l^2}{R^2} \ln \left\{ \frac{R}{\xi} \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right) \right\} \quad (5)$$

ここに、 m は原子の質量、 N は原子数、 ω は設定した等方的2次元調和振動子型トラップ・ポテンシャルの角振動数である。一応、右辺各項の由来を示しておく。第1項：原子のランダム運動（熱運動）のエネルギー。BECでは基本的に全ての原子が基底状態にあるというのが前提であるから、大きさは零点振動程度である。第2項：トラップ・ポテンシャルのエネルギー。第3項：原子間相互作用のエネルギー。第4項：言うまでもなく渦に起因する角運動エネルギー。

以上は言わば準備段階の式である。これらは a の値が正であるか負であるかの違いを除けば斥力BECと引力BECで何等違いがない。しかし最終的な結果の式は大いに異なる。本解析の主眼は（既述のように）エネルギー曲線の解析である。より具体的には、それを極小にする状態の把握にある。エネルギー ε は言うまでもなく R, l, N, a, b 等、複数の物理量を変数とする多変数関数である。現実のBECではこれらの変数のうち実験的（人為的）に値を固定されたもの以外は同時並行的に変化して ε を極小にする状態に向かって収斂して行くであろう。しかし計算はどうしても偏微分に頼ることになる。そのため取り扱う変数に優先順位を付けなければならない。ここでは変数 R と N に着目して(5)式

をこれら2変数の関数 $\varepsilon(R, N)$ とみなし、他の変数はパラメータとして極小化条件の決定を試みる。まず R で $\varepsilon(R, N)$ を偏微分して ε を極小にする R の値 R_c を求める。当然 R_c は他の全ての変数の関数になる。次に $\varepsilon(R, N)$ に $R=R_c$ を代入した式 $\varepsilon(R_c, N)$ を N で偏微分してこれを極小にする N の値 N_c を求める。そして、この N_c がパラメータ l, a, b , 等のような関数になっているかを見極めるのがここでの計算方針である。以下に結果を示す。

【引力BECに関する結果】

それぞれの状態の臨界原子数について異なる2種類の近似式を併記する。

循環量子数 l の渦が1個存在する場合の臨界原子数：

(多項式バージョン)

$$N_c(l, 1) = 0.7822 \frac{R_0 l^{\frac{5}{2}}}{|a|} \left(\ln \frac{R_0 l^{\frac{1}{2}}}{\xi} \right) \left\{ 1 + \frac{20\sqrt{2}}{43} \left(\frac{1}{l} \right) \left(\frac{b}{R_0} \right)^2 + \frac{36}{43} \left(\frac{1}{l^2} \right) \left(\frac{b}{R_0} \right)^4 \right\} \quad (6)$$

(有理式バージョン)

$$N_c(l, 1) = 0.7822 \frac{R_0 l^{\frac{5}{2}}}{|a|} \left(\ln \frac{R_0 l^{\frac{1}{2}}}{\xi} \right) \left\{ \frac{1 - 0.6150 \frac{1}{l} \left(\frac{b}{R_0} \right)^2}{1 - 1.273 \frac{1}{l} \left(\frac{b}{R_0} \right)^2} \right\} \quad (7)$$

R_0 は長さのディメンションを持つ定数で概ねBECの代表寸法(半径) R と同程度の値。 a は負である。

循環量子数1の渦が l 個存在する場合の臨界原子数：

(多項式バージョン)

$$N_c(1, l) = 0.7822 \frac{R_0 l^\alpha}{|a|} \left(\ln \frac{R_0}{\xi} \right) \sum_i \left\{ 1 + \frac{20\sqrt{2}}{43} \left(\frac{b_i}{R_0} \right)^2 + \frac{36}{43} \left(\frac{b_i}{R_0} \right)^4 \right\} \quad (8)$$

(有理式バージョン)

$$N_c(1, l) = 0.7822 \frac{R_0 l^\alpha}{|a|} \left(\ln \frac{R_0}{\xi} \right) \sum_i \left\{ \frac{1 - 0.6150 \left(\frac{b_i}{R_0} \right)^2}{1 - 1.273 \left(\frac{b_i}{R_0} \right)^2} \right\} \quad (9)$$

α は0から1/4の間の数。

以上4つの近似式は $b \ll R_0$ 及び $b_i \ll R_0$ の範囲で、より高い近似精度になっている。また、2つのバージョンは $b \ll R_0$ 及び $b_i \ll R_0$ の範囲ではほとんど等しい値になる。しかし b, b_i が R_0 に近づくと値の違いが大きくなる。さらにこれら2つのバージョン間には見掛け以上に大きな性質上の差異がある。これについては考察の節で詳述する。

《注》これら4式は $l=0$ (渦無し)の場合には適用できない。しかし本解析はそもそも渦が有る場合を対象としているので、これが議論の支障になることはない。

【斥力BECに関する結果】

渦を有する斥力BECには3段階の臨界原子数が存在するという結果が出た。但し、これらには引力BECのケースのように多項式バージョンと有理式バージョンで有意義な差が生じるというようなことはなく、どれも結果的に極めてシンプルな式で表される。循環量子数1の渦 l 個のケースの臨界原子数は大きい順に次のようになる。

$N_{c①}(1, l) > N_{c②}(1, l) > N_{c③}(1, l)$ とおくと、

$$N_{c①}(1, l) = \frac{1}{3a} \cdot \frac{R_0}{\xi} \sum_{i=1}^l b_i \quad (10)$$

$$N_{c②}(1, l) = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{a} \left(\ln \frac{R_0}{\xi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{i=1}^l b_i \quad (11)$$

$$N_{c③}(1, l) = 2^{\frac{7}{4}} \frac{1}{a R_0} l^{-\frac{1}{4}} \left(\ln \frac{R_0}{\xi} \right)^{-\frac{1}{4}} \sum_{i=1}^l b_i^2 \quad (12)$$

そして原子数 N が、 $N > N_{c①}(1, l)$ 及び $N_{c②}(1, l) > N > N_{c③}(1, l)$ の範囲ではエネルギーを極小にする R があり安定状態が存在する。一方、 $N_{c①}(1, l) > N > N_{c②}(1, l)$ 及び $N_{c③}(1, l) > N$ の範囲ではエネルギーを極小にする R が無く、安定な状態は存在しない。

以上が本解析で得られた結果である。予想したように渦が有れば斥力BECにも臨界原子数が存在することが示された。それが3個もあるとは意外であり、更に N に対して安定状態と不安定状態が交互に現れるというのは大変奇妙なことではあるが。ただ、同じ臨界原子数と言っても得られた表現式から判断すれば引力BECの有理式バージョンと斥力BECでは性質が本質的に異なることが明白である。これについては考察の節で詳述する。

3. 考察

3-1. 事前確認

以下の議論の前提として次の2点を共通認識とすべく確認しておきたい。

3-1-1. エネルギー保存法則

実際のBECでは多少ともエネルギーの散逸が考えられるが、本解析では散逸は考慮していない。基礎式であるグロス・ピタエフスキー方程式(1)も散逸項を含んでいない。従ってBEC全体のエネルギーは保存される。これに対して本解析で行ったことは(5)式で表されるエネルギーの極小化条件を求めることである。到達状態は初期状態とは異なるはずであるから、このエネルギー極小化によって放出される差額分のエネルギーは何処へ行くのか？ 最終状態への移行はBECの構

造変化をもたらす。減少分のエネルギーはこの変化に費やされる。換言すれば構造変化の動力源になると考えられる。微視的に見れば本来基底状態にあるべき原子の一部は励起状態に遷移するであろう。温度上昇である。また、熱運動とは少し違う形の運動エネルギーに変化することもあるかもしれない。解析という面ではこれらの変化に対応する因子が最初からエネルギー式に組み込まれていなければならない。しかし残念ながら(5)式にはそれが無い。近似式の弱点である。(余談ながら、時間変数を含むグロス・ピタエフスキー方程式(1)にはこれらの変化に対応できるメカニズムが或る程度備わっていると考えられる。それはこの式に基づいたコンピュータ・シミュレーションの結果を見れば理解できる。時間発展の中で上記“異種”運動が現れるからである。そして、その働きを担っているのは恐らく右辺第1項であろうと推測される。本稿ではコンピュータ・シミュレーションの結果は取り上げていない。)従って本解析は結果もさることながら、手法自体が近似的なものと言わざるを得ない。

ただ、こうした構造変化をも含めた解析を行うには、もう一つ別の“指導原理”が必要であると思われる。トータル・エネルギーが保存される中で、どうして各項間にエネルギーの移動が生じるのか? この問いに答えるには熱力学の物理量である「ヘルムホルツの自由エネルギー」のような概念がなければならない。例えば渦の個数の変化を伴う場合、渦そのものを一つの“粒子”とする“エントロピー”と、そのパートナーである“温度”といった新たな物理量の導入が必要になると考えられる。ともあれ、こうした研究は今後の課題としたい。

3-1-2. ケルビン定理

BECの渦(量子渦)に対しても古典流体力学の法則であるケルビン定理が成り立つと考える。量子渦でも渦に付随する物理量「循環」は“流体とともに動く閉曲線に沿って保存する⁴⁾”と考えるのである。循環は計算する積分路(閉曲線)が中に渦を含めば有限の値になり、渦を含まなければ当然0である。しかも量子渦では決まる値は積分路の形状によらない。従ってBEC全体の循環の計算は全ての渦を含むような積分路でありさえすればよく、BEC全体を囲む外形円を積分路に選ぶのが最も分かり易い。得られる値は(複素積分における留数の和に似て)それぞれの渦の循環の単純和で与えられる。このことは循環が量子数 l の1次式で表される⁵⁾ことから明白である。そして、この値が重要な保存量となる。ただ、この循環量子数の保存はあくまで明確な形で渦が存在する場合にのみ意味が

あり、系全体が乱れて運動が渦と見なせるのかそうではないのかの判定が難しくなるような状態では成立しなくなる可能性が高いことを念頭に置かなければならない。要するにケルビン定理は渦有ってこそその定理であり、本解析ではこうした状況下では循環量子数は保存しなくなるとする立場に立つものである。

3-2. 得られた結果に基づく推測

この節は得られた数式を解釈することによって導かれる推測である。

3-2-1. 循環量子数と渦個数の関係

循環量子数1の渦が l 個存在する時の角運動エネルギー $\varepsilon_v(1,l)$ は項の数だけ見れば $2lC_2 + l = l^2$ 個あり、全体の大きさは循環量子数 l の渦が1個存在する時の角運動エネルギー $\varepsilon_v(l,1)$ と同程度であるように見える。しかし実際は違う。 $\varepsilon_v(1,l)$ は $\varepsilon_v(l,1)$ よりかなり小さい。 $\varepsilon_v(1,l)$ 式中の相互作用項の因子 d_{ij} の大きさが $d_{ij} \approx R$ のオーダーであるのに対し独立項中の因子 ξ は $\xi \ll R$ であり、 $\varepsilon_v(l,1)$ はこの独立項だけの和だからである。相互作用項は b_i が R に近い位置の渦の大半については

$$\frac{R}{d_{ij}} \left(1 - \frac{b_i^2}{R^2}\right) < 1 \Rightarrow \ln \left\{ \frac{R}{d_{ij}} \left(1 - \frac{b_i^2}{R^2}\right) \right\} < 0$$

となる。従って相互作用項の概ね半数は負の値である。それらが正值項と相殺し合ってトータル的に見た相互作用項1個当たりの平均値は独立項1個よりかなり小さい。独立項は ξ の効果で常に正だからである。

$$\ln \left\{ \frac{R}{\xi} \left(1 - \frac{b_i^2}{R^2}\right) \right\} > 0$$

よって、 $\varepsilon_v(1,l)$ と $\varepsilon_v(l,1)$ の比較は概ね独立項の総和の比較になる。これにより $\varepsilon_v(1,l)$ は l との相関が l の1次式であることが分かる。従って l の2次式を因数に持つ $\varepsilon_v(l,1)$ の l^{-1} 倍程度ということになる。このことから循環量子数が2以上の渦は量子数の小さな渦に分裂して複数個になる方が角運動エネルギーの低下につながる。可能なら量子数1の渦に分裂するのが安定化にとって最良と言える。では実際には何個に分裂するのか? この問いに対する答はケルビン定理が与えてくれる。この定理により循環量子数は保存されなければならない。循環量子数は(既述の通り)一周積分する閉曲線の内側にある渦についての単純和になる。よってBEC全体を囲む閉曲線を積分路に選べば、循環量子数 l の渦1個と循環量子数1の渦 l 個は循環としては同等である。これにより循環量子数 l の渦1個は循環量子数1の渦 l 個に分裂する。しかもこれはBECが引力系か斥力系かによらない。そして放出されたエネルギーが分裂後の

個々の渦の揺動となって現れる。ただ、この揺動運動は循環量子数を変化させるものではないので、これによってケルビン定理が破綻することはない。

3-2-2. 複数渦の配置とケルビン定理の関係

分裂して l 個になった渦の配置を解析的に決定することは残念ながら未だ出来ていない。安定配置は(4)式の $\varepsilon_v(1, l)$ を極小化するものであり、三角格子状配置であろうことは想像に難くない。互いに隣り合う3個の渦が正三角形の頂点に位置する配置は平面上におけるいわゆる最稠密充填構造で、どの渦から見ても周囲の対称性が高く、対称性の高さが往々にして極値化の重要な要因になるからである。エネルギー $\varepsilon_v(1, l)$ の絶対量を問題にする時には相互作用項は(既述のように)無視できる。しかし $\varepsilon_v(1, l)$ の極小化が問題の場合には渦配置の違いによって生じる相互作用項の大きさの微妙な変化が重要な要因をなすと考えられる。そして、そうした観点で(4)式をよく見ると、もう一つ重要な事柄を含んでいることが分かる。それは b_i の大きさに上限が無ければ $\varepsilon_v(1, l)$ には極小値が存在しないということである。 b_i (及び b_j) が大きくなれば、それに伴って d_{ij} も大きくなる。これらは共にエネルギーに対して負の相関であり、その結果 $\varepsilon_v(1, l)$ は単調に減少することになる。すなわち全体のサイズを限定して、その中で比較すれば $\varepsilon_v(1, l)$ を極小にする確定した配置がおそらく存在するであろう。しかしサイズの限定を解除してしまえば、その配置の幾何学的形状を保ったまま相似的に膨張することで $\varepsilon_v(1, l)$ はいくらでも小さくなり得る。仮に一旦比較的安定な配置をとったとしても、次の段階で配置図形全体が膨張していく(特に最外辺に位置する渦はBECの縁に向かって移動する)はずである。その一方、こうした移動を止める力も働くことを考慮しなければならない。ケルビン定理による“圧力”である。それぞれの渦には当然占有スペースというものがある。渦芯の周りの流れがほぼ同心円状に整然と秩序立っている領域のことである。特に元々最外辺に位置している渦にとってみれば、それ以上BECの縁に向かって押しやられると占有スペースの一半に不足が生じることになる。流線が圧迫されて渦としての回転運動を保つことが困難になり、果ては渦でなくなってしまふという危険に晒されかねない。そうなればケルビン定理の破綻である。従って当然ケルビン定理はそうした方向に状態が推移するのを妨げるように作用する。いわゆる阻止圧である。このバランスが渦配置全体の挙動を決めると考えられる。しかし、これだけでは説明に十分ではない。もし全く別の“力”によってBECそのものが崩壊してしまうような事態に立ち至ればケ

ルビン定理はもはや無力になるであろうからである。要するに、ここでのケルビン定理はあくまでBEC有ったの定理であり、それ以上ではないということを考え合わせなければならない。そして、このことが大きな意味を持つと考えられるのが引力BECにおける臨界原子数の特殊性である。これについて次の節で詳述する。

3-2-3. 引力BECの崩壊と臨界原子数の関係

引力BECの臨界原子数について本論文では2つの異なるバージョンの近似式を導いている。これらの大きな違いは、多項式バージョンは b, b_i が R_0 に近づいても発散しないのに対し、有理式バージョンの方は発散することである。現実の物理量が発散するというのは常識的には少し考えにくい。しかし一方で引力BECが崩壊してしまう現象の説明には都合がよいという面がある。(注:量子プロセス理工学専攻 本庄・坂口研究室 修士課程学生の柏良輔君が行ったコンピュータ・シミュレーションで渦を有する引力BECが崩壊してしまう現象が見られている。) 引力BECでは幾つかの渦が何等かの要因でBECの縁付近の特定領域に立ち立った時点からBECそのものの崩壊が始まると推測される。そして、この現象は(9)式によって一応の説明が可能である。(9)式の臨界原子数 N_c は b_i が次の式で与えられる b_A 以下では b_i に関する単調増加関数になっている。

$$1 - 1.273 \left(\frac{b_A}{R_0} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b_A}{R_0} \doteq 0.8863$$

従って、 $0 \leq b_i < b_A$ の範囲で b_i が大きくなればそれに伴って N_c も増加し、これはエネルギー $\varepsilon_v(1, l)$ がより低い方にシフトして安定化が増す傾向と一致する。ここに、 R_0 は概ねBECの半径 R に等しい定数である。 b_A はその約89%であるから b_i が b_A に近づいても、その渦の占有スペースが著しく圧迫されることはなく渦が渦であることの妨げにはならない。ところが b_i が b_A を超えた瞬間に N_c は $-\infty$ に落ちてしまう。引力BECが比較的安定に存在できるのは原子数 N が N_c 以下の場合である。従って $N_c \rightarrow -\infty$ はBEC自体の存在基盤の喪失を意味する。これは将にBECの崩壊に他ならない。ついでながら、この劇的瞬間の寸前までトータルの循環量子数は l のまま維持されており、その意味ではケルビン定理は最後まで破綻していないと言える。一部の渦が b_A を超えるのは、そうした指向性のある運動の結果というより個々の渦の揺動が主たる原因であると考えの方が妥当であろう。(説明が重複するが) こうした揺動運動は循環量子数 l の渦が循環量子数1の渦に分裂する際に放出されるエネルギーに起因する。このことは斥力BECでも同じであるが、(10)式~(12)式から分かるように、斥力BECの臨界原子数はこのような劇的変化を

もたらず形にはなっていない。よって、こうした変化は起こらない。(上記コンピュータ・シミュレーションでも斥力BECは崩壊しないという結果が出ている。)ところで、この劇的変化は(9)式で渦芯位置を表す因子(b_i/R_0)を含む有理式の分母が $\{1-1.273(b_i/R_0)^2\}$ になっているから起こるということに注目しなければならない。この部分が(7)式のように $\{1-1.273(1/l)(b_i/R_0)^2\}$ で $l \geq 2$ であれば起こらない。なぜなら $0 \leq b_i \leq R_0$ の全域で常に正だからである。すなわち、この現象は循環量子数1の渦に特有なことであり、まさに循環量子数1の渦が循環量子数1の渦に分裂することに起因することなのである。同じ(5)式から出発し途中の計算もほとんど同様の形式でありながら単に因子 a が正であるか負であるかの違いによって、これほど異なる状況を呈する結果が導かれたことは驚きに値する。但し、以上の議論はあくまで引力BECの臨界原子数が有理式バージョンであると仮定してのことである点を改めて強調しておかなければならない。多項式バージョンの方が近似式としてより実際に近いということであれば、引力BECと斥力BECの臨界原子数に性質上のさほどの差異はないことになる。この方が物理的に納得し易い面もあるであろう。しかし引力BECの崩壊現象を臨界原子数の性質から説明することはできなくなる。

3-2-4. 斥力BECの臨界原子数と実験で実現されたBECの原子数との比較

解析的に得られた臨界原子数が具体的にどのような値になるのかは重要な問題である。数学的には一応の結果であっても物理的にほとんど現実性に乏しいような範囲の値であっては意味がない。よって、ここでは臨界原子数の妥当性を具体的な値を求めることで評価する。ただ、算出は本解析による形式論だけでは不可能である。必要な物理量の多くが具体的な情報に欠けているからである。そのため対象とするBECに具体的なモデルを設定して数値を与えなければならない。ここでは斥力BECとして、 ^{87}Rb で実現している渦無しBECの諸元を用いることにする。

【諸元】

$R_0 \approx 10^{-5}\text{m}$: $R_0(=R)$ は概ねこのオーダーである。

$a \approx 10^2 a_0$: a_0 はボア半径で約 $5.3 \times 10^{-11}\text{m}$ 。これは ^{87}Rb のBECのスピン三重項状態の散乱長 a_t が、 $a_t = (106 \pm 4) a_0$ であることによる⁶⁾。

$\xi \approx 10^{-3} R_0$: ξ の値は本解析からは情報が得られないので、このように推定する。とにかく $\xi \ll R_0$ である。

$l = 50$: l はこのように設定する。

$b_i \approx R_0/2$: b_i は全てを平均値で近似し、概ね R_0 の半分程度と考える。

これらの数字に基づいて、臨界原子数は次のように算出される。

$$N_{c①}(1,l) \approx 1.57 \times 10^7 \quad (\text{個})$$

$$N_{c②}(1,l) \approx 2.76 \times 10^5 \quad (\text{個})$$

$$N_{c③}(1,l) \approx 4.90 \times 10^4 \quad (\text{個})$$

これに対し、同様の設定の下でBECの原子数 N がどのような値になるかを見ておかなければならない。渦無しBECの原子数密度を気体の標準状態の数密度の 10^{-3} 倍程度とすると、

$$N \approx 1.1 \times 10^8 \quad (\text{個})$$

となる。

この値は $N > N_{c①}(1,l)$ である。以上の結果は二つのことを意味する。一つは得られた臨界原子数は3個とも物理的に意味があると判断できることである。もう一つはより現実に即している。すなわち実現されている ^{87}Rb の渦無しBECに循環量子数1の渦が50個程度付与されてもBECは渦無しの時の状態程度には安定性を維持するであろうと考えられることである。

4. 結言

改めて本解析の内容を振り返ってみる。半量子力学的考察から導かれたエネルギー式(5)から出発し途中の計算にも多くの近似が施されていて、結果的にかなり大胆な近似解になっていることは言うまでもない。特に次の2点について微視的理論に基づくより深い考察が欠如していることは強く念頭に置く必要があるであろう。

- ・原子間相互作用の取り扱い
- ・個々の原子の基底状態から励起状態への遷移の取り扱い

しかし、著者等が既に報告⁷⁾しているBECの渦形成とその分裂に関するコンピュータ・シミュレーションの結果や、上述の柏良輔君の渦を有する引力、斥力両BECに関するシミュレーションの結果(修士論文準備中)は、少なくとも現象的にはここに示した推測の幾つかと合致していることも事実である。なおこれらのシミュレーションはグロス・ピタエフスキー方程式(1)をSplit-Step Fourier法を用いて計算したものである。

ともあれ、本解析で次の2つの結果を得た。①渦を有する引力BECの臨界原子数の2種類の近似式。この中の有理式バージョンは渦芯位置を表すパラメータの値如何で発散するという特異な形になっている。多項式バージョンには発散はない。②渦を有する斥力BECに臨界原子数が存在することを示唆する数式的な根拠。導出された臨界原子数は3段階あり、値としては実験で実現しているBECの原子数との比較から見て、どれも物理的に意味をなす範囲のものである。

ただ、これらから導かれる内容の幾つかについては、常識的にみて俄かには信じ難いという面も無くはない。今後これらの内容が正しいにせよ修正を必要とするにせよ、実験によって検証されることを強く願うものである。

参考文献

- 1) C.J.Pethick,H.Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, Cambridge university press, (2002) 町田一成訳:「ボース・アインシュタイン凝縮」, 物理学叢書 100, 吉岡書店 (2005), p176
- 2) S.K.Adhikari, *Phys. Rev. E65* (2002) 016703
- 3) 同上.和訳版, p247~p248
- 4) 同上.和訳版, p253
- 5) 同上.和訳版, p239
- 6) 同上.和訳版, p140
- 7) A.Ohta, R.Kashiwa,, H.Sakaguchi, *Phys. Rev. A82* (2010) 055602