

カットセル法を用いた海洋モデルについて

及川 正道^{*1†}・経塚 雄策^{*2}

(平成17年7月29日 受理)

Ocean Model using Cut-Cell Method

Masamichi OIKAWA, Yusaku KYOZUKA

[†]E-mail of corresponding author: oikawa@esst.kyushu-u.ac.jp

The ocean model using Cut-Cell method has been developed to simulate flow field around topographic features with steep slope precisely. The model can describe flow field along topography including vertical flow more naturally than an existing z-coordinate model.

Key words: Cut-Cell Method, Finite-Volume Method, Numerical Simulation, Ocean Model

1. 結 言

数値シミュレーションにおいて、急勾配で高低差の大きい海山のような海底地形を取り扱う際には、種々の問題が生じる。σ座標系を用いたモデルでは、水平圧力勾配の計算誤差から偽の流れが現れる¹⁾。z座標系を用いたモデルでは、海底地形を階段上に近似することから、一般的に海底近くの流れの精度は低く、勾配が大きい海底地形では局所的に強い鉛直流が現れる²⁾。

航空機・自動車等の流体機械の設計等で使われる数値流体力学(CFD)では、任意形状の物体を取り扱えるように様々な手法が検討されている。物体形状に適合するよう生成される格子(境界適合格子)を有限要素法や有限体積法を適用して用いる方法や、直交格子を用いたVCE (Virtual Cell Embedding)法³⁾、Immersed Boundary 法⁴⁾、CIP (Cubic-Interpolated Propagation) 法⁵⁾、仮想境界法 (Virtual Boundary)⁶⁾などが用いられている。しかしながら物体境界の取り扱いが厳密化されるものの、境界適合格子では任意形状を扱う際の格子生成の計算コストが大きく、直交格子を用いた手法では、計算処理が複雑になり3次元問題を取り扱う際の計算コストが大きくなる。そこで、格子生成の計算コストが小さく、計算処理も比較的単純な直交格子を用いたCut-Cell法^{7,8)}を海洋モデルに適用することにした。Cut-Cell法は、海底地形の形状を平面または曲面で近似し、計算セル内において流体が占める領域にのみ有限体積法を適用し支配方程式を離散化している。これにより、海底近傍の流れが従来のz座標モデルに比して

より実際のものに近づき、計算精度が向上することが期待される。

モデルは、z座標を用いているMECモデル⁹⁾¹⁰⁾をベースとしており、MECモデルにCut-Cell法を用いるための、変数及びサブルーチンを付加することにより拡張している(以降は、MECのオリジナルモデルを単にMECモデルと呼び、MECにCut-Cell法を適用したモデルをCut-Cellモデルと呼ぶことにする)。作成した海洋モデルを用いてガウシアン型海山の周囲の流れを計算した結果、従来のモデルを用いて計算したものに比べて精度が向上していることを確認した。

本件では、第2節と第3節で本モデルのベースとなったMECモデルと作成したCut-Cellモデルの概要についてそれぞれ説明し、第4節においてCut-Cellモデルを用いて行った海山周りの流動場の計算結果を、MECモデルを用いた際の計算結果と共に示す。最後に、第5節において、本研究のまとめを行う。

2. MECモデルの概要

MECモデルは、沿岸海洋の物理環境を解くための数値モデルであり、静水圧モデル、Full 3Dモデル、そしてその結合ルーチンからなる複合モデルである。本モデルでは、この内静水圧近モデルのみを使用した。以下にMECモデルの静水圧近似部分について簡単に説明する。

静水圧部分の支配方程式は、Boussinesq近似を適用したNavie-Stokes型の運動方程式、連続の式、水温・塩分の移流・拡散式からなる。鉛直方向の運動方程式には

*1 大気海洋環境システム学専攻博士課程

*2 総合理工学研究院 流体環境理工学部門

静水圧近似が適用されている。運動方程式及び連続の式について、以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + A_M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + A_M \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

上式で使われている変数は以下の通りである。

- u : 流速 (x方向) (m/s)
- v : 流速 (y方向) (m/s)
- w : 流速 (z方向) (m/s)
- P : 圧力 (N/m²)
- ρ : 密度 (kg/m³)
(ρ_0 は定数で代表密度を表す。)
- f : コリオリパラメーター(s⁻¹)
- g : 重力加速度 (m/s²)
- A_M : 水平渦動粘性係数 (m²/s)
- K_M : 鉛直渦動粘性係数 (m²/s)

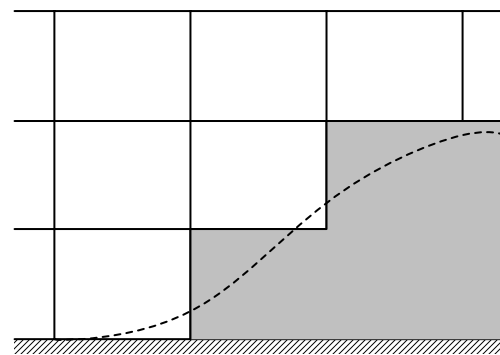
水位の時間発展の式は、連続の式を海底から海面まで積分することにより得られる。これによって解くべき未知量は水位・水平方向流速・水温・塩分となり、鉛直方向流速及び圧力については他の諸量から自動的に決定される。これらの式をstaggered mesh (Arakawa C grid)上で離散化している。移流項は一次上流差分、拡散項は二次中央差分となっている。水位と水平方向流速の時間発展の式の組み合わせには

、Forward-Backwardスキームが用いられている。水温・塩分の時間発展の式はオイラーの陽解法によって解かれる。粘性及び拡散は、それぞれ渦動粘性係数及び渦動拡散係数によって表現される。水平方向の渦動粘性・拡散係数についてはリチャードソンの4/3乗則が適用され、格子間隔の4/3乗に比例するように与えられている。鉛直方向の渦動粘性・拡散係数については勾配型リチャードソン数を用いた成層化関数により求められている。

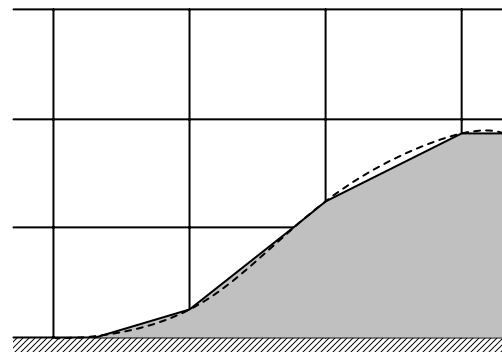
3. Cut-Cell 法

従来のz座標系を用いた海洋モデルでは、Fig.1(a)に示すように海底地形を階段状に近似している。この場合、海底地形近傍の流れの精度の低下は避けがたく、局所的に強い流れが現れることも指摘されている²⁾。

Cut-Cell法は、z座標系においてFig.1(b)に示すように海底地形を平面または曲面で近似することにより、海底地形近傍の流れの精度を改善するものである。この場合、1つの計算セルの内部に流体領域と海底地形などの固体領域が共存することになる。支配方程式の離散化は、計算セルの流体領域に対して有限体積法を適用することによって行っている。



(a) Step topography



(b) Cut Cell

Fig.1 The representation of a smoothly varying bottom (broken line) in a z-coordinate model.

3.1 有限体積法

ここで、モデルで使われている有限体積法について以下に示すスカラー量 ϕ の保存式を例にして説明する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (5)$$

ここで、 F は ϕ に関するフラックスを表す。

(5)式の両辺について体積が V である計算セル内で体積積分を行う。第2項には、ガウスの発散定理を適用し、体積積分を面積分に変換する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV + \int_A \vec{F} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (6)$$

ここで、 n は計算セル表面の面積要素 dA に垂直で外向きの単位ベクトルを表している。(6)式は、体積内の ϕ の変化が計算セルの表面を通してのフラックスの出入によって決定されることを意味している。

(6)式を計算セルへ適用することを考える。 I 番目のセルについて(6)式は、以下のように表現される。

$$V_I \frac{\partial}{\partial t} \phi_I + \sum_J F_{I,J} A_{I,J} = 0 \quad (7)$$

ここで、上式第2項は J により識別される計算セルの表面要素に関する和である。また、 ϕ_I と $F_{I,J}$ は、それぞれ ϕ の計算セル体積内の平均値と F の計算セル境界面内の平均値であり、以下の式で表される。

$$\phi_I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \phi dV \quad (8)$$

$$F_{I,J} = \frac{1}{A_{I,J}} \int_{A_{I,J}} \vec{F} \cdot \vec{n} dA \quad (9)$$

以上のように、計算セルにおいて固体領域を除き変形した流体領域に対して、任意形状に適用可能な有限体積法を用いることによって、支配方程式の離散化が可能となる。

3.2 支配方程式の離散化

有限体積法を適用することにより支配方程式の離散化を行う。ここでは、例として以下に示す非圧縮性流体のNavie Stokes方程式の離散化を行う。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (10)$$

ここで、 u は速度、 P は圧力、 Re はレイノルズ数を表している。 i,j に関してはアインシュタインの縮約を取るものとする。

微分型の(10)式をテンソル形の発散型に書き換えると次式ようになる。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \text{div}(p\vec{I}) + \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\text{grad}(\vec{u})) \quad (11)$$

\otimes : Tensor product
 \vec{I} : Unit Tensor

(11)式を、計算セル内で空間積分することにより積分型の支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{V_{i,j}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV &= - \int_{V_{i,j}} \text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dV - \int_{V_{i,j}} \text{div}(p\vec{I}) dV \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \int_{V_{i,j}} \text{div}(\text{grad}(\vec{u})) dV \\ &= - \int_S (\vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n} dA - \int_S (p\vec{I}) \cdot \vec{n} dA \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \int_S \text{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (12)$$

上式(12)に、前節で示した有限体積法による離散化を適用する。

$$\begin{aligned} V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= - \sum_m (\vec{u} \otimes \vec{u})_m \cdot \vec{n} dA_m - \sum_m P_m \vec{I} \cdot \vec{n} dA_m \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \sum_m \text{grad}(\vec{u})_m \cdot \vec{n} dA_m \end{aligned} \quad (13)$$

3.3 変数配置

本モデルで新規に導入する変数をTable1にまとめ、運動量方程式に関わる主要な変数の配置をFig.2に示す。

Table1 List of variables.

uc	velocity in x direction (m/s)
vc	velocity in y direction (m/s)
A	surface area of fluid part in x direction (m ²)
B	surface area of fluid part in y direction (m ²)
C	surface area of fluid part in z direction (m ²)
V	volume of fluid part (m ³)

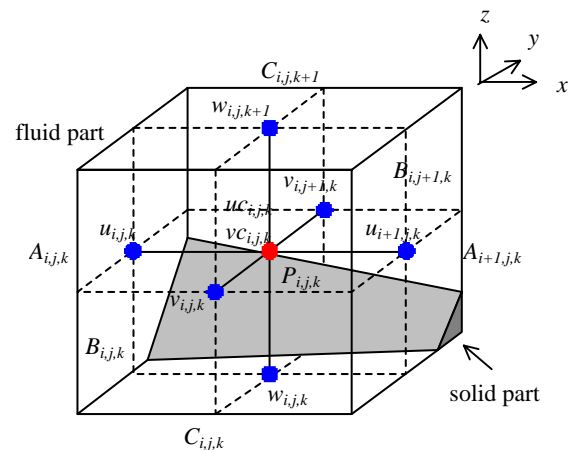


Fig.2 A cell being cut by solid.

計算セル内の灰色の領域は固体領域を表しており、それ以外が流体領域を表している。海底地形を考慮した計算セルにおける境界面積(A,B,C)と体積(V)の計算方法を付録A.1に記す。

変数配置はMECモデルでは、staggered配置であるが、本モデルでは、計算セル中心に水平速度変数(uc,vc)を加えることによりcollocate配置としている。collocate配置では、格子毎に変数値が激しく変動する計算モードを起しやすくとされるため、海洋モデルでは、計算の安定性が高いstaggered配置を使うことが多い。しかし、staggered配置の場合には、有限体積法を適用する変数が分散配置されるため、変数毎に有限体積法を適用する計算セルを設定し、個別に体積、表面積を評価しなければならず、計算が煩雑になる。本モデルでは、変数がセル中心に集中配置され計算セルを変数同士で共用でき、有限体積法の適用が容易となるcollocate配置を選択した。計算モードを抑制するためMECモデルで使われているstaggered配置された速度変数も併用することとした。本モデルで新しく加えた速度変数(uc,vc)は運動量方程式を、MECモデルで使用される速度変数(u,v,w)は連続の式を満たすものとしている。

3.4 差分式

以下に、移流、圧力及び粘性の各項の具体的な差分式をFig.2に示した計算セルに基づき求める。

3.4.1 移流項

移流項は以下のように、差分表示される。

$$\begin{aligned}
 & adv_term \\
 &= \sum_m (\vec{u} \otimes \vec{u})_m \cdot \vec{n} dS_m \\
 &= [A_{i,j,k} uc_{i,j,k}^{(x)} u_{i,j,k} - A_{i-1,j,k} uc_{i-1,j,k}^{(x)} u_{i-1,j,k} \\
 &+ B_{i,j,k} uc_{i,j,k}^{(y)} v_{i,j,k} - B_{i,j-1,k} uc_{i,j-1,k}^{(y)} v_{i,j-1,k} \\
 &+ C_{i,j,k} uc_{i,j,k}^{(z)} w_{i,j,k} - C_{i,j,k-1} uc_{i,j,k-1}^{(z)} w_{i,j,k-1}] \cdot \vec{i} \\
 &+ [A_{i,j,k} vc_{i,j,k}^{(x)} u_{i,j,k} - A_{i-1,j,k} vc_{i-1,j,k}^{(x)} u_{i-1,j,k} \\
 &+ B_{i,j,k} vc_{i,j,k}^{(y)} v_{i,j,k} - B_{i,j-1,k} vc_{i,j-1,k}^{(y)} v_{i,j-1,k} \\
 &+ C_{i,j,k} vc_{i,j,k}^{(z)} w_{i,j,k} - C_{i,j,k-1} vc_{i,j,k-1}^{(z)} w_{i,j,k-1}] \cdot \vec{j} \\
 & \text{where} \\
 & \begin{cases} \vec{i} : & \text{unit vector pointing to x direction} \\ \vec{j} : & \text{unit vector pointing to y direction} \end{cases} \quad (14)
 \end{aligned}$$

移流項の差分式(14)の上添え字(x),(y)が付いた速度変数は、計算セル中心の速度変数を用いて、それぞれx方向とy方向に3次精度のQUICK (quadratic upstream interpolation for convective kinematics) 補間を適用して

求められる境界面上の速度変数である。例として $uc^{(x)}$ については、補間係数 q を用いて、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 uc_{i,j,k}^{(x)} &= q_{i-2,j,k} uc_{i-2,j,k} + q_{i-1,j,k} uc_{i-1,j,k} \\
 &+ q_{i,j,k} uc_{i,j,k} + q_{i+1,j,k} uc_{i+1,j,k} \quad (15)
 \end{aligned}$$

本モデルは、格子間隔を変化させて用いるvariable meshの使用を想定しており、格子間隔に応じて補間係数を定める必要がある。不等格子間隔の場合のQUICK補間係数の求め方について付録A2を参照されたい。

格子間隔が一定の場合には以下ようになる。

Case 1: $u_{i,j,k} > 0$

$$\begin{aligned}
 uc_{i,j,k}^{(x)} &= -\frac{1}{8} \times uc_{i-2,j,k} + \frac{6}{8} \times uc_{i-1,j,k} \\
 &+ \frac{3}{8} \times uc_{i,j,k} + 0 \times uc_{i+1,j,k} \quad (16a)
 \end{aligned}$$

Case 2: $u_{i,j,k} < 0$

$$\begin{aligned}
 uc_{i,j,k}^{(x)} &= 0 \times uc_{i-2,j,k} + \frac{3}{8} \times uc_{i-1,j,k} \\
 &+ \frac{6}{8} \times uc_{i,j,k} - \frac{1}{8} \times uc_{i+1,j,k} \quad (16b)
 \end{aligned}$$

3.4.2 圧力項

圧力項は以下のように、差分表示される。

$$\begin{aligned}
 & prs_term \\
 &= \sum_m P_m \vec{i} \cdot \vec{n} dS_m \\
 &= [A_{i,j,k} P_{i+\frac{1}{2},j,k} - A_{i-1,j,k} P_{i-\frac{1}{2},j,k} \\
 &+ (A_{i,j,k} - A_{i-1,j,k}) P_p] \cdot \vec{i} \\
 &+ [B_{i,j,k} P_{i,j+\frac{1}{2},k} - B_{i,j-1,k} P_{i,j-\frac{1}{2},k} \\
 &+ (B_{i,j,k} - B_{i,j-1,k}) P_p] \cdot \vec{j} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$P_{i-1/2,k}, P_{i+1/2,k}, P_{i,j-1/2,k}, P_{i,j+1/2,k}$ は、計算セルの境界面上の圧力値を表し、これらの値は、隣り合う計算セル内の値との1次の線形内挿により求められる。また、 P_p は、流体と固体領域の境界面における圧力値を表しており、当該計算セルと隣接する計算セルの圧力値を用いて1次の線形外挿により求められる。その際に当該セルと隣接するセルの中心点を通る鉛直平面内における固体領域境界面の代表点の位置(dx,dz)のみを考慮し、この鉛直平面に垂直な方向の固体領域の位置は考慮しないものとする。以下に、例としてx方向の圧力勾配の求め方を、Fig.3に示す計算セルに基づいて説明する。

粘性項は、上式のとおり、隣接する計算セルとの流体領域内の境界面と計算セル内の固体領域の境界面における水平速度の勾配とその境界面積との積の和になっている。ただし、鉛直方向の固体領域境界面（面積は $C_{i,j,k+1}-C_{i,j,k}$ ）では、海底からの摩擦力を受けるものとした。(25)式では、海底摩擦係数を α で表している。

例として、Fig.4の計算セルに基づいて水平速度成分 u が x 方向の境界面を通して受ける応力を示す。

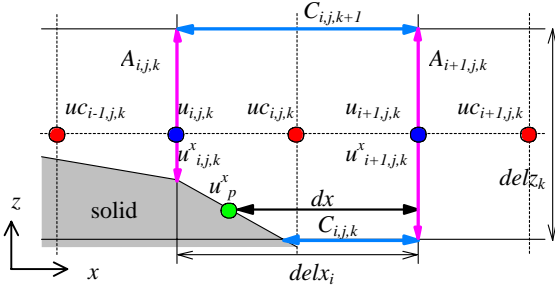


Fig.4 Arrangement of variables for calculation of a viscosity term.

$$K_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K_M \times \frac{A_{i,j,k} (u_{i+1,j,k}^x - u_{i,j,k}^x) + (A_{i+1,j,k} - A_{i,j,k}) (u_{i+1,j,k}^x - u_p^x)}{V_{i,j,k}} \quad (26)$$

ここで、 K_M は水平渦動粘性係数を表す。

固体領域境界面の速度勾配の x 方向成分 u_p^x を、no slip条件を仮定し以下のように表している。

$$u_p^x = \frac{u_{i+1,j,k}}{dx} \quad (27)$$

上式において、 dx は計算セルにおいて固体領域に覆われている境界面に相対する境界面から固体領域代表点までの距離を表しているが、圧力項の差分式で用いたものと同じで(24)式で表される。

3.4.4 連続の式

鉛直流速 w はstaggered配置された境界面上の速度変数 u, v を用いて連続の式により、以下のように計算される。

$$w_{i,j,k} = C_{i,j,k-1} w_{i,j,k-1} + [A_{i-1,j,k} u_{i-1,j,k} - A_{i,j,k} u_{i,j,k} + B_{i,j-1,k} v_{i,j-1,k} - B_{i,j,k} v_{i,j,k}] / C_{i,j,k} \quad (28)$$

海面変位 z_t は、最上位層($k=nk$)の計算セルにおいて、鉛直流速と同様にstaggered配置された速度変数 u, v を用いて、以下のように計算される。

$$z_t^{(n+1)} = z_t^{(n)} + \Delta t [C_{i,j,nk-1} w_{i,j,nk-1}^{(n)} + A_{i-1,j,nk} u_{i-1,j,nk}^{(n)} - A_{i,j,k} u_{i,j,nk}^{(n)} + B_{i,j-1,nk} v_{i,j-1,nk}^{(n)} - B_{i,j,k} v_{i,j,nk}^{(n)}] / C_{i,j,nk} \quad (29)$$

3.4.5 時間積分

計算セルの中心に配置された速度変数 $uc(vc)$ の時間方向の積分は、有限体積法を適用した離散式 ((13)式を参照) に従って、オイラーの陽解法により以下のように行われる。

$$Gu_{i,j,k}^{(n)} = -[adv_term]_x + [vis_term]_x \quad (30a)$$

$$uc_{i,j,k}^{(n+1)} = uc_{i,j,k}^{(n)} + \Delta t \frac{(Gu_{i,j,k}^{(n)} - [prs_term]_x)}{V_{i,j,k}} \quad (30b)$$

adv_term, vis_term 及び prs_term は、それぞれ移流項 ((14)式)、粘性項 ((25)式) 及び圧力項 ((17)式) を表している。 Δt は時間ステップ間隔、上付き添え字 (n) は時間ステップ数、そして下付き添え字 x は x 成分であることを示している。

境界面上に配置された速度変数 $u(v)$ の次の時間ステップの値は、その境界面で接している2つの計算セルの中心に配置された速度変数 (uc_{i-1}, uc_i) を用いた境界面上における線形の内挿値に、2つの計算セルを一体とみなして計算される移流項と粘性項に、2つの計算セルの圧力から求められる局所的な境界面上の圧力勾配を足し合わせるにより、以下のように計算される。

$$u_{i,j,k}^{(n+1)} = \frac{(uc_{i,j,k}^{(n)} \cdot delx_{i-1} + uc_{i-1,j,k}^{(n)} \cdot delx_i)}{delx_{i-1} + delx_i} + \Delta t \left\{ \frac{(Gu_{i,j,k}^{(n)} + Gu_{i-1,j,k}^{(n)})}{V_{i,j,k} + V_{i-1,j,k}} - \frac{grv(P_{i,j,k}^{(n)} - P_{i-1,j,k}^{(n)})}{0.5(delx_{i-1} + delx_i)} \right\} \quad (31)$$

計算セルの中心に配置された速度変数では、圧力勾配を求める際に、(19)式に示したように、境界面上の圧力を隣接する2つの計算セルの圧力値の内挿を用いているので、圧力値が1格子毎に激しく変化(計算モード)しても、それに対する抑制機構が働かない。そこで、上式のように境界面に配置された速度変数の時間積分の際に、局所的な圧力勾配を加えることによって、計算モードに対する抑制機構が強まるものと期待される。

3.5 Cut-Cell 法の問題点

Cut-Cell法において、計算セルにおける流体領域の割合が小さい場合、計算が不安定になる要因となる。Adcroft²⁾らは、Cut-Cell法を用いる際に、計算の安定性を確保するためには、下式に示すように流体領域体

積を境界面の平均で割ることにより得られる実効的な格子幅が、CFL条件を満たすように設定されることが望ましいとしている。

$$\Delta x_{eff} \approx \frac{V_{i,j,k}}{0.5(A_{i+1,j,k} + A_{i,j,k})} \quad (32a)$$

$$\Delta y_{eff} \approx \frac{V_{i,j,k}}{0.5(B_{i,j+1,k} + B_{i,j,k})} \quad (32b)$$

本モデルでは、海底地形を考慮して計算セルを構成する際（付録A.1参照）に、極端に小さい流体領域を持つ計算セルを作らないために、使用する水深と計算セルの上面（または下面）の距離が計算セルの高さの2割未満の場合は、水深を上面（または下面）の位置に変更するものとしている。

また、計算セルにおいて流体領域が占める割合が半分以下の場合は、その計算セルの上部のものと合体し、一体のものとして通常の計算を行うこととした。計算により得られる変数値は合体した計算セル同士で共用するものとした。

4. 数値計算例

作成したモデルの精度を検証するため、本モデルとMECモデルを用いてFig.5に示すような平坦な海底面にガウシアン型の海山を置いた簡易地形を使った数値計算を行い、結果を比較・検討した。

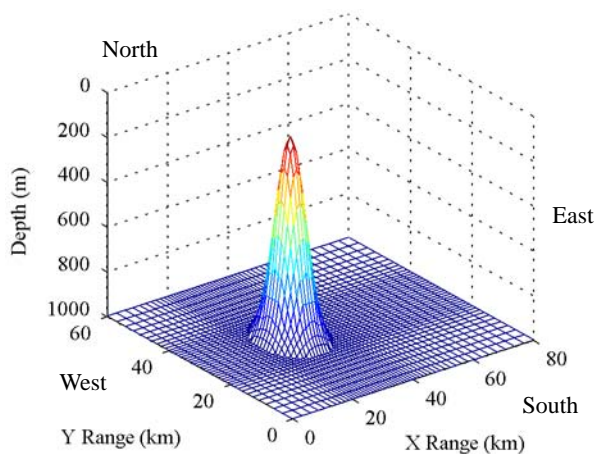


Fig.5 Perspective plot of the seamount geometry, and the horizontal numerical grid.

4.1 計算条件

計算条件を以下のとおり設定した。Cut-Cell法とMECモデルの計算の際には同じ条件を用いた。Cut-Cell法とMECモデルでの海底地形の近似状態の違いを水平断面と鉛直断面についてFig.6に示す。

- (1) 計算領域
 - x軸方向: 80km
 - y軸方向: 60km
 - z軸方向: 1000m（鉛直方向、深さ）
- (2) 格子
 - 格子数: (x:80)×(y:60)×(z:12)
 - 格子間隔:
 - 中心部: 等間隔1km
格子数: (x:20)×(y:20)
 - 周辺部: 不等間隔
中心部から周辺部へ向けて1.1倍の比で等比級数的に拡張
鉛直方向: 12層
20m,30m,50m,100m×9層
- (3) 海山形状
 - 水深(m)は以下の関数によって表される。
 $depth = 1000 - 900 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{5000^2}\right)$ (33)
 - (x_0, y_0): 海山山頂の座標位置 (Fig.5参照)
 $x_0=y_0=30\text{km}$
- (4) 境界条件
 - 西境界: 流入 流速値0.3m/s
水平・鉛直方向共に一様
 - 東境界: 流出 流速値0.3m/s
水平・鉛直方向共に一様
 - 南北境界: Free Slip
- (5) 物理パラメータ
 - コリオリパラメータ: $f=7.11 \times 10^{-5} \text{ (s}^{-1}\text{)}$
 - 水平渦動粘性係数: $50 \text{ m}^2/\text{sec}$ (固定)
 - 鉛直渦動粘性係数: $0.001 \text{ m}^2/\text{sec}$ (固定)
 - 水温: 21°C (固定)
 - 塩分: 34.8‰ (固定)
- (6) 計算パラメータ
 - 時間ステップ: 5 sec.
 - 積分時間: 10 days

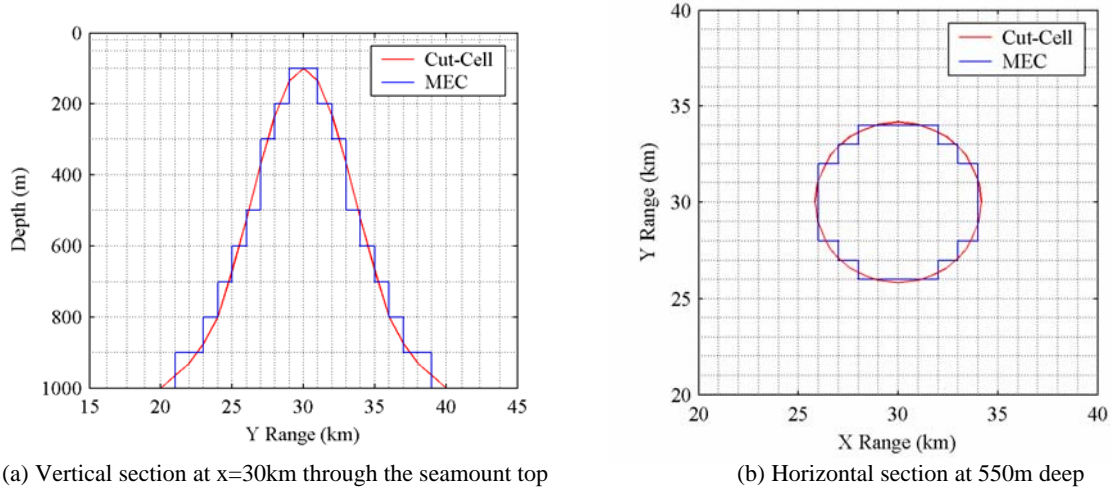


Fig.6 The representation of the seamount bottom in Cut-Cell model and MEC model.

1

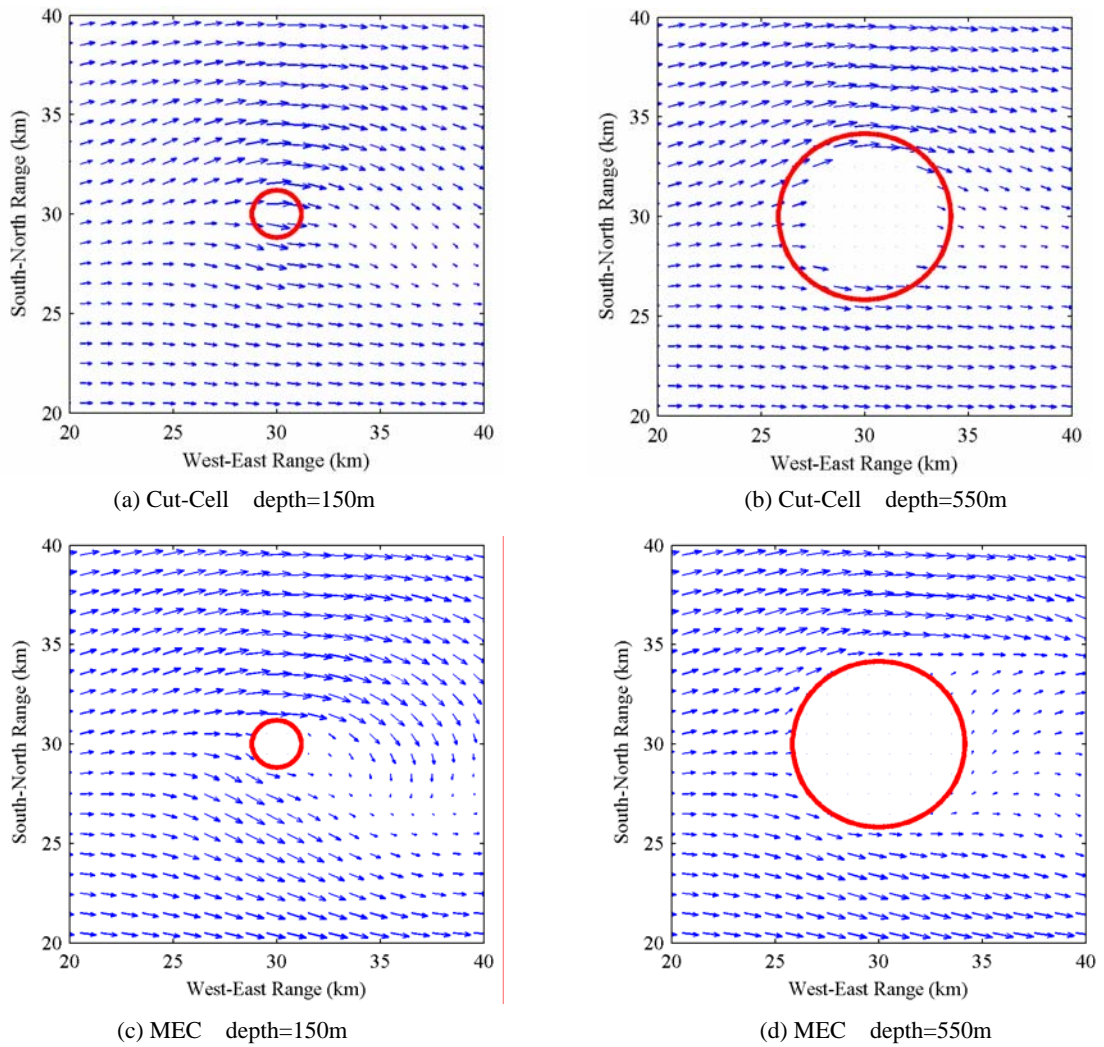


Fig.7 Plain view of horizontal velocity vectors.

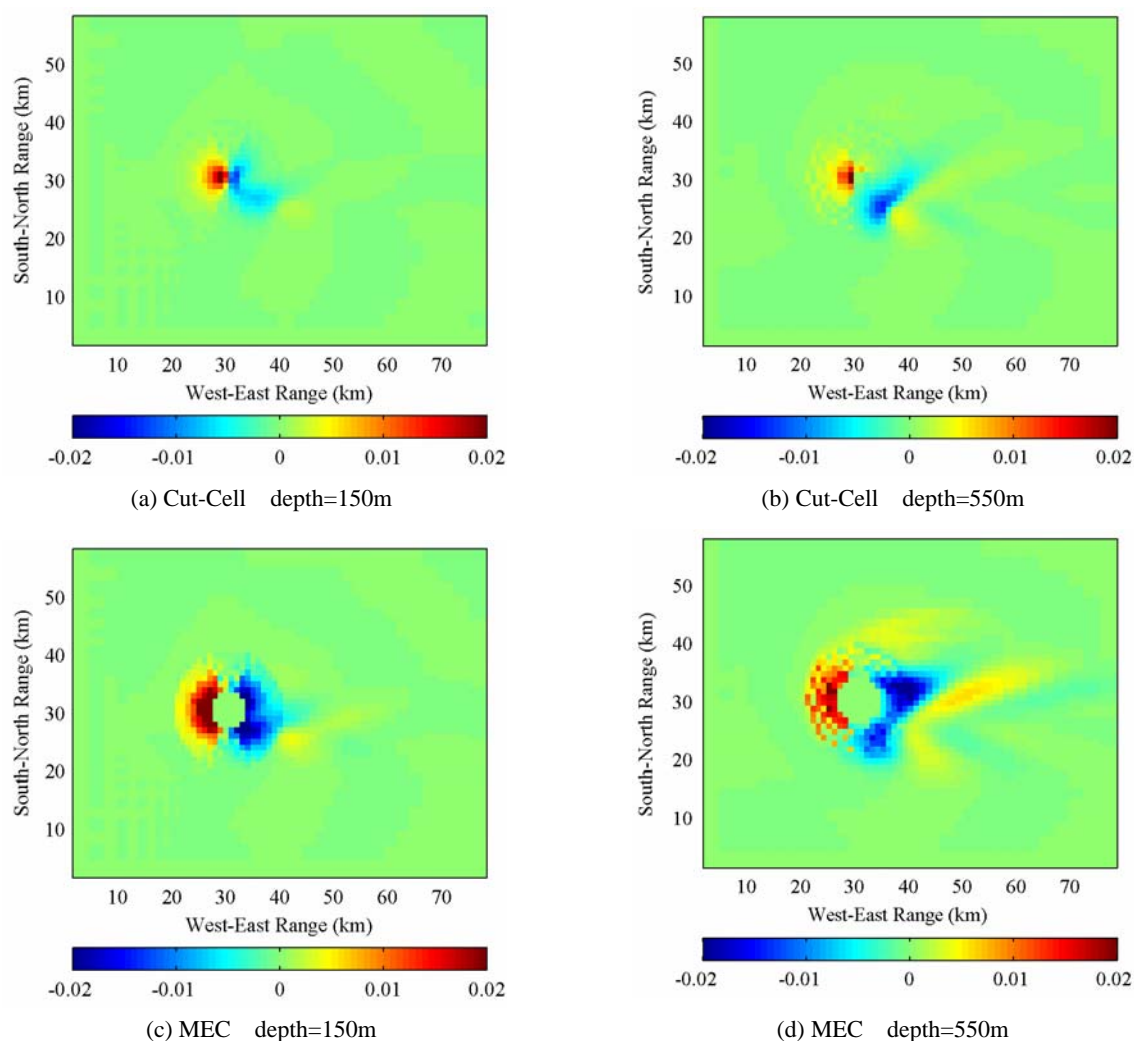


Fig.8 Plain view of vertical velocity distributions.

4.2 計算結果

以下にCut-Cell法とMECモデルの計算結果を示す。

Fig.7には海山近傍における水平流速分布を、Fig.8には鉛直流速分布を、それぞれ深度150mと550mの場合について示す。

Fig.7に示した海山近傍の水平方向の流れは、Cut-Cell法の場合には、海山の地形に沿った流れが滑らかに表現されているのに対して、MECモデルでは、海山の南北側面において、東向きの流れが強く現れ、海山の地形に沿った流れの成分が弱まり、海山の後方の広い範囲の流れが弱くなっている。これは、Fig.6(b)に示したように、MECにおける海底地形の近似が粗く、格子の並びに対して斜め方向の流れが表れにくい状況にあるためであると考えられる。一方、Cut-Cell法では、MECモデルと同じ格子数にも関わらず海底地形に沿った流れを滑らかに表すことができている。

Fig.8に示した海山近傍の鉛直流でも、MECモデルでは、特に上流側（西側）に表れる上昇流の分布が分散的であるのに対して、Cut-Cell法では、上流側でも上昇流の分布が滑らかになっている。これは、MECモデルでは、海底地形を階段状に近似しているために、局所的に鉛直方向の強い流れが表れやすい傾向にあるためであると考えられる。Cut-Cell法では、海底地形の近似の精度が高いために、鉛直方向の流れを滑らかに表現することに成功している。2つのモデルで、下流側（東側）の鉛直流分布が異なっているが、これは、主にFig.7に示したように2つのモデルで海山後方の流れの分布が違っているためであると考えられる。

5. 結 言

急勾配を持った海底地形の周りでも、精度が高い流れの数値計算が可能となるようにMECモデルに有限体積法を用いたCut-Cell法を適用した。このモデルは、格子生成の計算コストも低く、複雑な計算方式も必要としない。ただし、実効的に計算セルを縮小するため、一般的に従来のz座標系モデルに比べ、計算する際の時間ステップを小さくする必要がある。また、安定した計算を効率的に行うために計算セルの実効的な体積が小さくなり過ぎないように水深を微調整したり、小さくなった計算セルを他の計算セルと一体的に取り扱うといった工夫が必要である。

Cut-Cell法とMECモデルを用いてガウシアン型の海山を配した海底地形を用いた数値計算を行い、計算結果により、海山近傍の流れの精度が水平方向及び鉛直方向ともにCut-Cell法を適用することにより改善されることが確認された。また、海山近傍の流れの精度による海山後方の流動場への影響が大きいことが確認され、本モデルで用いたCut-Cell法が海山等の複雑な海底地形近傍の流動場の計算精度の向上に寄与するものと期待される。

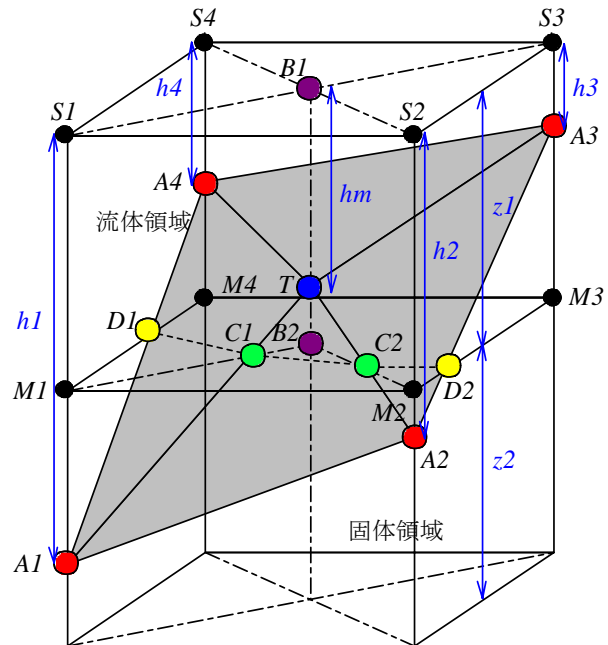
参 考 文 献

- 1) Mellor, G.L., Ezer, T., and Oey, L.-Y., "The Pressure Gradient Conundrum of Sigma Coordinate Ocean Models," J. Atmos. Oceanic Technol., 11, 1126-1134 (1994).
- 2) Adcroft, A., Hill, Chris, and Marchall, "Representation of Topography by Shaved Cells in a Height Coordinate Ocean Model," Monthly Weather Review, 125, 2293-2315 (1997).
- 3) Landsberg, A. M., et al.: "The Virtual Cell Embedding Method : A Simple Approach for Gridding Complex Geometries," AIAA-97-1982 (1997).
- 4) Ye, T., Mittal, R., Udaykumar, H.S., and Shvy, W., "Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries," AIAA-99-3312, 545-557 (1999).
- 5) 矢部孝, 肖鋒, "固体・液体・気体の統一解放とCIP法(2)", 数値流体力学, 7, 103-114.
- 6) Saki, E.M., and Bringen, S., "Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform flow: Application of a Virtual Boundary Method," J. Comput. Phys., 123, 450-465 (1996).
- 7) 寺本進, 藤井孝蔵, "直角格子法による三次元物体周りの流れ解析", 第12回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 299-300.
- 8) 雷康斌, 岩田正子, 野田茂徳, 姫野龍太郎, "V-CAD データを直接利用する二次元の任意形状流れ場の数値解析", ものづくり情報技術統合化研究(第2回): Integrated Volume-CAD System Research, 理化学研究所ものづくり情報技術統合化研究プログラム
- 9) 日本造船学会, 海洋環境研究委員会, "MEC Ocean Model オペレーションマニュアル Version 1.1", (2003)
- 10) 濱田孝治, "MEC Ocean Model について", 海と空, 80, 27-36 (2004).

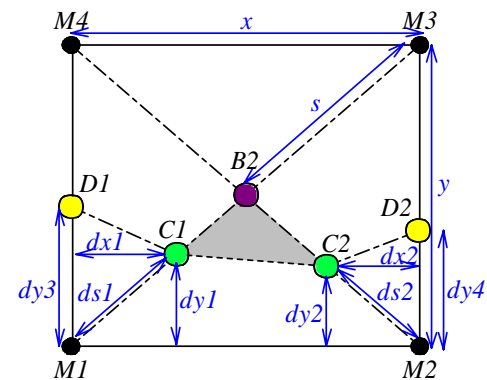
付 録

A1. 計算セルの体積及び表面積の求め方

計算セルの流体領域の体積及び表面積の計算方法を以下の鉛直方向に並ぶ2つの計算セルについて示す。上側を計算セル1、下側を計算セル2とする。



(a) Side view of the two cells



(b) Horizontal interface between the two cells

Fig.A1 Definition of the points in the program.

A1.1 定数・変数

A1.1.1 計算セル基本定数

- x, y : 水平方向格子幅
- z1-2 : 鉛直方向格子幅
- h1-4 : 水深 (計算セル1の上面を基準とする)

A1.1.2 主要変数

$$s=0.5(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$hm=(h1+h2+h3+h4)/4$$

$$ds1=s[1-(z1-hm)/(h1-hm)]$$

$$ds2=s[1-(z1-hm)/(h2-hm)]$$

$$dx1=0.5x \cdot ds1/s$$

$$dx2=0.5x \cdot ds2/s$$

$$dy1=0.5y \cdot ds1/s$$

$$dy2=0.5y \cdot ds2/s$$

$$dy3= y(h1-z1)/(h1-h4)$$

$$dy4= y(h2-z1)/(h2-h3)$$

A1.2 流体領域の体積

A1.2.1 全体(計算セル1+計算セル2)

流体領域の体積 (計算セル1+計算セル2)

$$= \text{立体}[S1S2B1-A1A2T] + \text{立体}[S2S3B1-A2A3T] \\ + \text{立体}[S3S4B1-A3A4T] + \text{立体}[S4S1B1-A4A1T]$$

立体[S1S2B1-A1A2T]の体積

$$= (h1+h2+hm)x \cdot y/12$$

立体[S2S3B1-A2A3T]の体積

$$= (h2+h3+hm)x \cdot y/12$$

立体[S3S4B1-A2A3T]の体積

$$= (h3+h4+hm)x \cdot y/12$$

立体[S4S1B1-A3A4T]の体積

$$= (h4+h1+hm)x \cdot y/12$$

A1.2.2 計算セル2

計算セル2における流体領域の体積

$$= \text{立体}[A1-C1D1M1] + \text{立体}[A2-C2D2M2] \\ + \text{立体}[A1A2-C1C2M2M1]$$

立体[A1-C1D1M1]の体積

$$= dx1 \cdot dy3(h1-z1)/6$$

立体[A2-C2D2M2]の体積

$$= dx2 \cdot dy4(h2-z1)/6$$

立体[A1A2-C1C2M2M1]

$$= \text{立体}[S1S2B1-A1A2T] + \text{立体}[T-B2C1C2]$$

$$- \text{立体}[S1S2B1-M1M2B2]$$

$$= (h1+h2+hm)x \cdot y/12$$

$$+ (z1-hm)\{x \cdot y/4 - [(x-dx1-dx2)(dy1+dy2) \\ + dx1 \cdot dy1 + dx2 \cdot dy2]/2\} / 2 - x \cdot y \cdot z1/4$$

A1.2.3 計算セル1

計算セル1における流体領域の体積

$$= [\text{流体領域全体の体積}] - [\text{計算セル2の流体領域の体積}]$$

A1.3 表面積

A1.3.1 計算セル1側面

境界面[S1S2-M1M2]=x \cdot z1

境界面[S2S3-M2D2]=y \cdot z1 - (y-dy4)(z1-h3)/2

境界面[S3S4-A3A4]=(h3+h4)x/2

境界面[S4S1-D1M1]=y \cdot z1 - (y-dy3)(z1-h4)/2

A1.3.2 計算セル2側面

境界面[M1M2-A1A2]=(h1+h2-2dz1)x/2

境界面[M2D2-A2]=dy4(h2-z1)/2

境界面[M1D1-A1]=dy3(h1-z1)/2

A1.3.3 鉛直方向境界面

境界面[S1S2S3S4]=x \cdot y

境界面[D1C1C2D2-M2M1]=[(x-dx1-dx2)(dy1+dy2) \\ + dx1 \cdot dy1 + dx2 \cdot dy2]/2

A2. QUICK 補間係数の決定

QUICK (quadratic upstream interpolation for convective kinematics)は、セル境界の物理量 $\phi_{i+1/2}$ の内挿法として、その境界の前後を挟んでいる2つのセルの値の他に、風上側にもう1つ離れたセルの値を用いて2次の多項式による内挿を行うものである。

下図において、格子間隔が等しい場合($dx_{i-1}=dx_i=dx_{i+1}$)、補間式は以下ようになる(流れは、 i が増加する方向へ向いているものとする)。物理量 ϕ_{i-1} 、 ϕ_i 、 ϕ_{i+1} は、セル中心で定義されているものとする。

$$\phi_{i+1/2} = \frac{-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}}{8} \quad (A1)$$

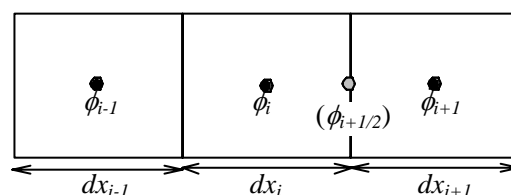


Fig.A2 Positions of variables.

作成したモデルでは、variable meshを用いているので、格子間隔が等しくない場合のQUICK補間係数が必要となる。そこで下式において、精度が3次以上となるように係数(a,b,c)を定めることを考える。

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = a\phi_{i-1} + b\phi_i + c\phi_{i+1} \quad (\text{A2})$$

ϕ_{i-1} 、 ϕ_i 及び ϕ_{i+1} を $\phi_{i+1/2}$ の回りでテーラー展開することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{i-1} &= \phi_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{-1} \cdot \frac{\partial \phi_{i+1/2}}{\partial x} + \frac{(\Delta x_{-1})^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dots \\ \phi_i &= \phi_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_0 \cdot \frac{\partial \phi_{i+1/2}}{\partial x} + \frac{(\Delta x_0)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dots \\ \phi_{i+1} &= \phi_{i+\frac{1}{2}} + \Delta x_1 \cdot \frac{\partial \phi_{i+1/2}}{\partial x} + \frac{(\Delta x_1)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

ここで、 Δx_{-1} 、 Δx_0 及び Δx_1 は、それぞれ ϕ_{i-1} 、 ϕ_i 及び ϕ_{i+1} の定義点と $\phi_{i+1/2}$ の定義点の距離を表しており、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta x_{-1} &= 0.5dx_{i-1} + dx_i \\ \Delta x_0 &= 0.5dx_i \\ \Delta x_1 &= 0.5dx_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

(A2.3)式を(A2.2)式に代入し補間係数に関してまとめると、1次と2次の誤差項が"0"になるという条件のもと以下の行列方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\Delta x_{-1} & -\Delta x_0 & \Delta x_1 \\ (\Delta x_{-1})^2 & (\Delta x_0)^2 & (\Delta x_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

これを、以下のように解くことによって等しくない格子間隔の組み合わせに対する3次精度の補間係数を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\Delta x_{-1} & -\Delta x_0 & \Delta x_1 \\ (\Delta x_{-1})^2 & (\Delta x_0)^2 & (\Delta x_1)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$