

河川による地形のパターン形成

佐伯 亜由美^{*1}・岡村 誠^{*2}
(平成19年10月31日 受理)

Pattern Formation of River Landscape

Ayumi SAEKI and Makoto OKAMURA

†E-mail of corresponding author: saeki@riam.kyushu-u.ac.jp

Landscape evolution involves many complex processes related to the fluid motion, granular materials, vegetation and so on. Furthermore, its dynamics covers a wide range of length and time scales. Therefore, almost all models tend to rely on empirical formulas. We now propose a more principled model using shallow water equations combined with mass conservation of sediment. In our simulations, we show that a sheet flow forms the stripe pattern called a gully, not the channel network, and that a channel without banks builds the banks on both sides.

Key words : landscape evolution, pattern formation, shallow water equation, erosion, deposition, gully

1. 緒 言

河川の分岐や蛇行, 河川によって作られた地形は時に複雑なネットワーク構造を形成する. これらは河川の浸食・堆積, 降水, 風化, 地殻変動などの多くのファクターによって形成され, そのメカニズムは非常に複雑である. 過去の研究においては, 様々なモデルが研究されている. これらのモデルは大きく3種類に分けることができる. まず初めは, ランダムウォークモデル¹⁾である. このモデルでは, 水源からの流れが進む方向をランダムに決めて, 河川のネットワークを再現しようとするものである. これは河川や地形以外の分岐パターンの研究でも多く使われている. 2番目はランダムトポロジーモデル²⁾である. これはトポロジカルにランダムなネットワークによって河川網を再現し, その特徴を探っている. 河川や地形の形成過程で大切だと思われる流体の動きや土砂の浸食・堆積などのプロセスを全く含んでいないが, 実際に見られる河川のパターンに近いものが再現出来ているという点は興味深い. 以上の二つは平面的なネットワークを扱っている. 最後に物理的モデルである. これは水文学的法則を使ったもの³⁾や, 流体物理を応用したもの^{4,5)}など多岐にわたる. 上に述べた2つのモデルよりもパターンの形成プロセスがモデルに含まれており, より原理的と言えるが, 様々な要因が絡み合っているため複雑になり, 経験則的な関係式を多く含むのが難点である.

本研究では過去に研究された様々な地形形成や河川の形態形成のモデルを踏まえた上で, 新しい物理的モデル

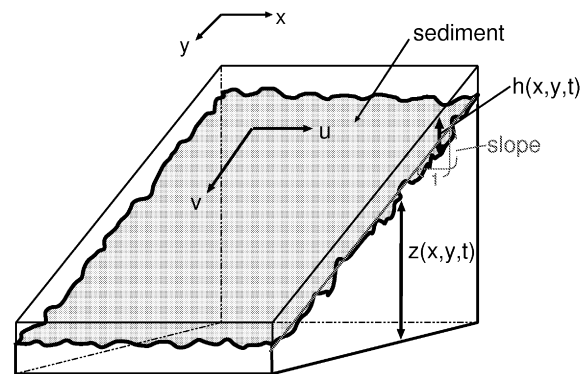


Fig. 1 モデルの概念図.

を提案し, それについて数値計算を行った. 新しいモデルとは, 浅水流方程式に加えて, 流れによって運ばれる土砂をモデル化したもの, 及び土砂の保存式を組み合わせたものである.

2. モデル

2.1 モデルの定式化

Fig. 1のような斜面(初期の傾き = slope)に, 十分浅い水深を持つ流れを考える.

この流れにおける流体の運動方程式は以下のような浅水流方程式で書くことができる(詳細は付録 A1. 参照).

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g \frac{\partial (h+z)}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (1)$$

*1 大気海洋環境システム学専攻博士課程

*2 応用力学研究所基礎力学部門

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial(h+z)}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで (\bar{u}, \bar{v}) は水深方向 z に平均した x, y 方向の流速であり (簡単のため, これより以後は (\bar{u}, \bar{v}) の $-$ を省略して (u, v) と書くことにする), h は水深, ρ は流体の密度, (τ_x, τ_y) は壁摩擦応力である. また, 標高 z の時間変化は以下のように書ける.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + D \nabla^2 z \quad (4)$$

ここでベクトル \mathbf{q}_s は単位幅あたりの土砂の輸送量, D は拡散係数である. 第1項は流れによる土砂の輸送量の変化分を表し, 第2項は土砂の風化や崩落過程などによる拡散の時間平均を表す.

2.2 土砂輸送量 q_s のモデル化

(4) の土砂輸送量 q_s は以下のようにモデル化する.

$$\mathbf{q}_s = k_f (k_t U^q S^\gamma - \tau_c)^p \frac{\mathbf{u}}{U} \quad (5)$$

ここで U は流速の絶対値, S は勾配の絶対値 $\sqrt{(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2}$ である. これによって q_s は土砂の輸送は流速と同じ向きを持つ.

2.3 壁摩擦応力 τ のモデル化

(1), (2) の $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ のモデル化は以下のようにする. Izumi and Parker⁴⁾ より,

$$\tau = \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{u} \quad (6)$$

ここで係数 C_f は摩擦係数である. 壁摩擦速度 u_τ と壁摩擦応力 τ は

$$\tau = \rho u_\tau^2 \quad (7)$$

となり, C_f は

$$C_f = \frac{\int_0^l \tau dx}{l \rho u / 2} \quad (8)$$

とかける. (7), (8) より

$$\tau = \rho C_f u^2 / 2 \quad (9)$$

が得られる. C_f は実際は定数ではないがここでは簡単のため定数とする.

3. 数値計算

移流項には CIP 法を用い, 拡散項には ADI 法を用いて数値計算を行う. 非移流項の計算は以下のようにする. (1), (2) の非移流部分 (右辺) を G とおいておく. 左辺=0 として移流項を CIP 法で解いて求めた新しい場所 (i, j) における u の値を $u_{i,j}^*$ とすると次の時間 $n+1$ での値 $u_{i,j}^{n+1}$ は次のように書ける.

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* + G_{i,j} \Delta t \quad (10)$$

次に $u_{i,j}$ の微分値 $g_{i,j}^{n+1}$ を求める場合には, $G_{i,j}$ の微分を使わずに, 次のように (10) より G を求めて, その空間微分を取ったものを使う.

$$\frac{g_{i,j}^{n+1} - g_{i,j}^*}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x \Delta t} - \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*}{2\Delta x \Delta t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} g_{i,j}^* \quad (11)$$

また, (4) の離散化は以下のようにする.

$$\begin{aligned} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^n}{\Delta t} = & - \frac{(q_{sx})_{i+1,j} + (q_{sx})_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ & - \frac{(q_{sy})_{i,j+1} + (q_{sy})_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ & + D \frac{z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i-1,j} + z_{i,j-1} - 4z_{i,j}}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (12)$$

4. 結果と考察

4.1 水路群の形成とその時間発展

初期条件に斜面の傾き (slope) と水深 h を与え, 標高 z には擾乱をランダムに加える. u, v, h は x, y 方向どちらも周期境界で, z に関しては x 方向は周期境界, y 方向は, 斜面に平行な基準面をとりそこからの距離を周期境界とする. 以下の結果において示すのは水深 h であるが, 流速ベクトルの方向に土砂の輸送が起こるので, 標高 z と水深 h の値自体は異なるが, 同じパターンとなる. すなわち川のパターンと地形のパターンは同じとなるので, どちらを見ても良い. よってここでは水深のみを扱う. Fig. 2 は slope が 0.04 の場合である. その他のパラメータは, $\Delta x = \Delta y = 1.0, \Delta t = 0.1, h = 0.01, \text{amp} = 0.01, K_f = 1.0, C_f = 0.01, D = 1.0, q = 1.8, \gamma = 2.1$ とした. 簡単のため, $K_t = \tau_c = 0$ としてある. すぐに初期水路群が形成され (Fig. 2 左), 水路群は始めは不安定だが, $t=500$ (Fig. 2 右) あたりで水路が完全に形成されると, その後, 形をほとんど変えず安定に存在する (水深, 標高は変化する). ここで初期の斜面の傾き (slope) の大きさを変化させて, 水路の本数の時間変化をプロットしたものを Fig. 3 に示す. slope が小さい場合には短時間で安定な水路が形成されるのに対して, slope を大きくすると安定な水路は形成されなくなることがわかる. これは Izumi らの安定性解析⁴⁾ による, 「勾配が緩やかな場合は擾乱の成長率がゼロとなるような安定な水路間隔が存在するが, 勾配が急なところでは存在しない」という結果と一致する.

4.2 水路の時間発展

次に初期条件として真ん中に一本の直線水路を持つ状況を考える. ここでも標高 z にはランダムな擾乱を加え, 境界条件は前節と同様にする. この水路の時間発展を同じモデルでシミュレーションすると, 結果は以下のようになる. まず, 勾配がかなり小さい場合には Fig. 4 のよ

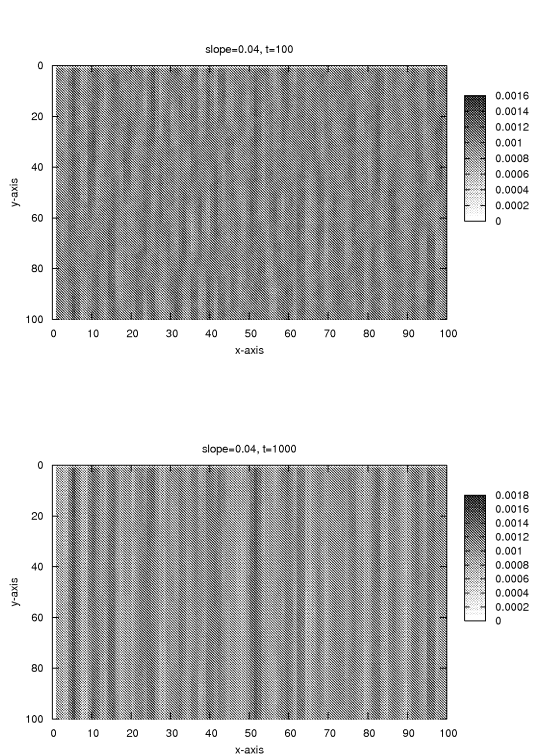


Fig. 2 slope=0.04 の場合の水深の時間変化. 色が濃い部分が水深が大きい. 左: $t=100$, 右: $t=1000$.

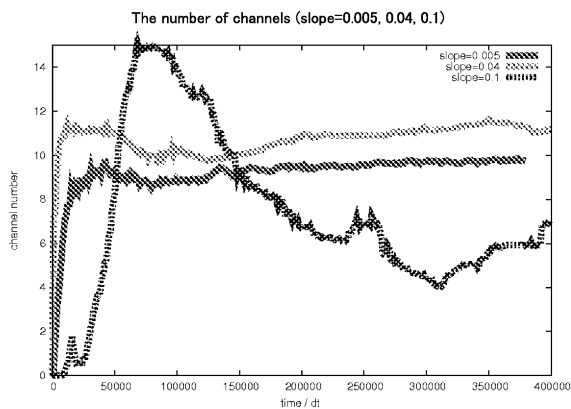


Fig. 3 slope が 0.005, 0.04, 0.1 の場合の水路の本数の時間変化.

うに浸食・堆積の効果はほとんど無く、水路は流れと垂直な方向に徐々に拡散していくのみである。ここで流れの方向は図の奥から手前の向きとする。しかし、勾配が前節の安定な水路群が出現する場合と同じ程度のとき、Fig. 5 のように浸食と堆積によって水路は深くなり、堤防が自己形成される。この水路は蛇行や分岐をすることなく直線流のままである。これは、(4) の右辺第 1 項が土砂の保存となっているため、浸食された土砂は領域内に

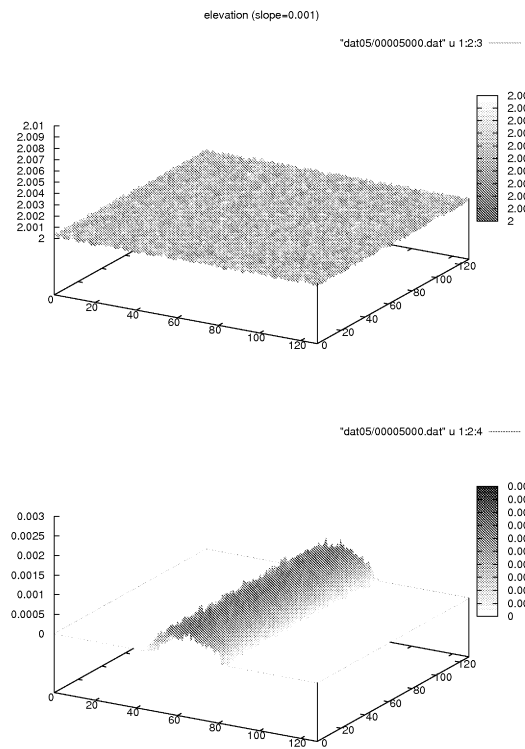


Fig. 4 slope=0.001 の場合の標高 z (左図), および水深 h (右図).

堆積せざるをえなくなり、堤防が自己形成されてしまうことによると考えられる。河川の蛇行や分岐が起こるためには河川がこの堤防を乗り越えるような垂直方向の何らかの大きな外力が必要となり、この外力が無い限り複雑なネットワークには発展しない。

これは、前節で述べた水路群に対しても同じことが言える。前節の水路群が複雑なネットワークへと発展せず安定な水路群となるのは同様に各水路が堤防を自己形成するからと考えられる。

よって、自然に河川のネットワークが形成されるためには、(4) の右辺第 1 項が重要となってくる。今後は流体中に浮遊して流れる土砂の効果などを取り入れる必要がある。

5. 結 言

以上、浅水流方程式に土砂の保存を組み合わせた新しいモデルについて数値シミュレーションを行った結果、以下の結論を得た。

1. 斜面全体に水を流した場合、斜面の勾配が小さい場合には多数の安定な水路群が形成されることがわかった。
2. 一本の水路の場合には、堤防が自己形成され水路は

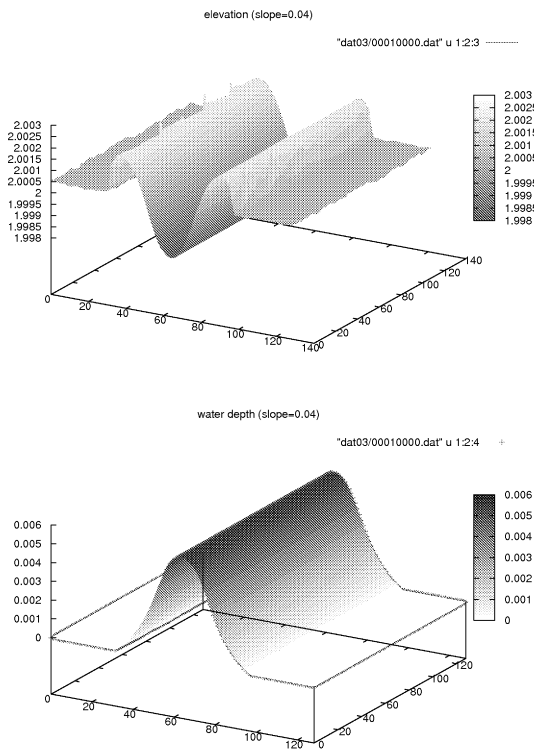


Fig. 5 slope=0.04 の場合の標高 z (左図), および水深 h (右図).

直線流のままである。これはモデルに土砂の保存式が含まれるからと考えられる。これより、今後複雑な河川のネットワークを調べる場合には、流体中の浮遊土砂の存在なども考慮に入れる必要がある。

参考文献

- 1) J. S. Smart, and V. L. Moruzzi. Random-walk model of stream network development. *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 15, No. 3, pp. 197-203, 1971.
- 2) R. L. Shreve. Statistical law of stream numbers. *J. Geol.*, Vol. 74, pp. 17-37, 1966.
- 3) A. D. Howard. A detachment-limited model of drainage basin evolution. *Water Resour. Res.*, Vol. 30, No. 7, pp. 2261-2285, 1994.
- 4) N. Izumi and G. Parker. Linear stability analysis of channel inception: Downstream-driven theory. *J. Fluid Mech.*, Vol. 419, 2000.
- 5) 柳田達雄, 西森拓, 小西哲郎. 川の蛇行 網状転移. 京都大学数理解析研究所考究録, Vol. 1184,

pp. 30-40, 2001.

付 録

A1. 浅水流方程式の導出

基礎となる Navier-Stokes 方程式と連続の式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (A1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (A2)$$

(A1)+(A2) より (以下 x 座標のみ示す)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \\ = K_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (A3)$$

と書ける。ここで流れが十分浅く、 $\frac{\partial u}{\partial z} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ とすると (A3) は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = K_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (A4)$$

となる。また圧力が静水圧分布に従うとすると、 $p = \rho g(H - z) = \rho g(\eta + h - z)$, $\mathbf{K} = (0, 0, g)$ より (A4) は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -g \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (A5)$$

となる。これを $z = \eta \sim H$ で積分すると,

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^H \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{\eta}^H \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_{\eta}^H \frac{\partial uv}{\partial y} dz + \int_{\eta}^H \frac{\partial uw}{\partial z} dz \\ = -g \int_{\eta}^H \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} dz + \int_{\eta}^H \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dz \end{aligned} \quad (A6)$$

ここで以下のライプニッツの法則

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{f(x)}^{g(x)} W(x, y) dy \right) \\ = \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial W}{\partial x} dy + W(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x} - W(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \quad (A7)$$

及び水面 ($z = H$) 及び川底 ($z = \eta$) における運動学的境界条件,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + u(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial x} + v(x, y, H) \frac{\partial H}{\partial y} = w(x, y, H) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = w(x, y, \eta) \end{aligned} \quad (A8)$$

より, (A6) は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H uv dz \\ = -gh \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} \end{aligned} \quad (A9)$$

となる。さらに,

$$\int_{\eta}^H u dz = h\bar{u}, \int_{\eta}^H u^2 dz = h\bar{u}^2, \int_{\eta}^H uv dz \simeq h\bar{u}\bar{v} \quad (A10)$$

と定義すると, (A9) は,

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -gh \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} \quad (A11)$$

と書け, これが x 方向の浅水流方程式となる。 y 方向も同様にする,

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}\bar{u}}{\partial y} = -gh \frac{\partial(\eta + h)}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} \quad (A12)$$

となり、 y 方向の浅水流方程式が得られる。次に、連続の式についても同様にする。(A2) 式を $z = \eta \sim H$ で積分すると、

$$\int_{\eta}^H \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{\eta}^H \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{\eta}^H \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{A13})$$

これにライプニッツの法則 (A7) を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H u dz - u|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial x} + u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H v dz \\ - v|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial y} + v|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + w|_{z=H} - w|_{z=\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

さらに (A8) を使うと、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^H v dz = 0 \quad (\text{A15})$$

よって (A10) より、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A16})$$

となる。

以上より、(A11)(A12) を (A16) を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -g \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho h} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -g \frac{\partial(\eta + h)}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho h} \end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、浅水流方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g \frac{\partial(\eta + h)}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (\text{A17})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial(\eta + h)}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho h} \quad (\text{A18})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A19})$$