

カットセル法を用いた海洋モデルについて

及川 正道^{*1†}・経塚 雄策^{*2}

(平成17年7月29日 受理)

Ocean Model using Cut-Cell Method

Masamichi OIKAWA, Yusaku KYOZUKA

[†]E-mail of corresponding author: oikawa@esst.kyushu-u.ac.jp

The ocean model using Cut-Cell method has been developed to simulate flow field around topographic features with steep slope precisely. The model can describe flow field along topography including vertical flow more naturally than an existing z-coordinate model.

Key words: Cut-Cell Method, Finite-Volume Method, Numerical Simulation, Ocean Model

1. 結 言

数値シミュレーションにおいて、急勾配で高低差の大きい海山のような海底地形を取り扱う際には、種々の問題が生じる。σ座標系を用いたモデルでは、水平圧力勾配の計算誤差から偽の流れが現れる¹⁾。z座標系を用いたモデルでは、海底地形を階段上に近似することから、一般的に海底近くの流れの精度は低く、勾配が大きい海底地形では局所的に強い鉛直流が現れる²⁾。

航空機・自動車等の流体機械の設計等で使われる数値流体力学(CFD)では、任意形状の物体を取り扱えるように様々な手法が検討されている。物体形状に適合するよう生成される格子(境界適合格子)を有限要素法や有限体積法を適用して用いる方法や、直交格子を用いたVCE (Virtual Cell Embedding)法³⁾、Immersed Boundary 法⁴⁾、CIP (Cubic-Interpolated Propagation) 法⁵⁾、仮想境界法 (Virtual Boundary)⁶⁾などが用いられている。しかしながら物体境界の取り扱いが厳密化されるものの、境界適合格子では任意形状を扱う際の格子生成の計算コストが大きく、直交格子を用いた手法では、計算処理が複雑になり3次元問題を取り扱う際の計算コストが大きくなる。そこで、格子生成の計算コストが小さく、計算処理も比較的単純な直交格子を用いたCut-Cell法^{7,8)}を海洋モデルに適用することにした。Cut-Cell法は、海底地形の形状を平面または曲面で近似し、計算セル内において流体が占める領域にのみ有限体積法を適用し支配方程式を離散化している。これにより、海底近傍の流れが従来のz座標モデルに比して

より実際のものに近づき、計算精度が向上することが期待される。

モデルは、z座標を用いているMECモデル⁹⁾¹⁰⁾をベースとしており、MECモデルにCut-Cell法を用いるための、変数及びサブルーチンを付加することにより拡張している(以降は、MECのオリジナルモデルを単にMECモデルと呼び、MECにCut-Cell法を適用したモデルをCut-Cellモデルと呼ぶことにする)。作成した海洋モデルを用いてガウシアン型海山の周囲の流れを計算した結果、従来のモデルを用いて計算したものに比べて精度が向上していることを確認した。

本件では、第2節と第3節で本モデルのベースとなったMECモデルと作成したCut-Cellモデルの概要についてそれぞれ説明し、第4節においてCut-Cellモデルを用いて行った海山周りの流動場の計算結果を、MECモデルを用いた際の計算結果と共に示す。最後に、第5節において、本研究のまとめを行う。

2. MECモデルの概要

MECモデルは、沿岸海洋の物理環境を解くための数値モデルであり、静水圧モデル、Full 3Dモデル、そしてその結合ルーチンからなる複合モデルである。本モデルでは、この内静水圧近モデルのみを使用した。以下にMECモデルの静水圧近似部分について簡単に説明する。

静水圧部分の支配方程式は、Boussinesq近似を適用したNavie-Stokes型の運動方程式、連続の式、水温・塩分の移流・拡散式からなる。鉛直方向の運動方程式には

*1 大気海洋環境システム学専攻博士課程

*2 総合理工学研究院 流体環境理工学部門

静水圧近似が適用されている。運動方程式及び連続の式について、以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + A_M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + A_M \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

上式で使われている変数は以下の通りである。

- u : 流速 (x方向) (m/s)
- v : 流速 (y方向) (m/s)
- w : 流速 (z方向) (m/s)
- P : 圧力 (N/m²)
- ρ : 密度 (kg/m³)
(ρ_0 は定数で代表密度を表す。)
- f : コリオリパラメーター(s⁻¹)
- g : 重力加速度 (m/s²)
- A_M : 水平渦動粘性係数 (m²/s)
- K_M : 鉛直渦動粘性係数 (m²/s)

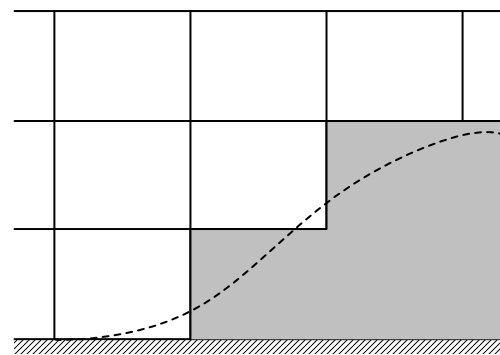
水位の時間発展の式は、連続の式を海底から海面まで積分することにより得られる。これによって解くべき未知量は水位・水平方向流速・水温・塩分となり、鉛直方向流速及び圧力については他の諸量から自動的に決定される。これらの式をstaggered mesh (Arakawa C grid)上で離散化している。移流項は一次上流差分、拡散項は二次中央差分となっている。水位と水平方向流速の時間発展の式の組み合わせには

、Forward-Backwardスキームが用いられている。水温・塩分の時間発展の式はオイラーの陽解法によって解かれる。粘性及び拡散は、それぞれ渦動粘性係数及び渦動拡散係数によって表現される。水平方向の渦動粘性・拡散係数についてはリチャードソンの4/3乗則が適用され、格子間隔の4/3乗に比例するように与えられている。鉛直方向の渦動粘性・拡散係数については勾配型リチャードソン数を用いた成層化関数により求められている。

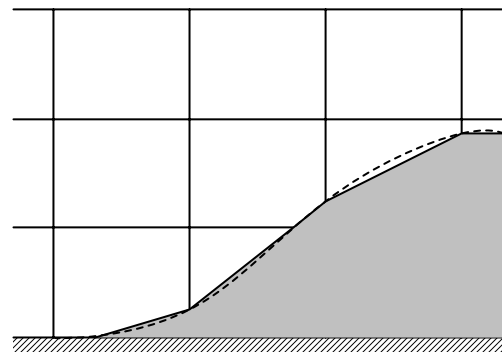
3. Cut-Cell 法

従来のz座標系を用いた海洋モデルでは、Fig.1(a)に示すように海底地形を階段状に近似している。この場合、海底地形近傍の流れの精度の低下は避けがたく、局所的に強い流れが現れることも指摘されている²⁾。

Cut-Cell法は、z座標系においてFig.1(b)に示すように海底地形を平面または曲面で近似することにより、海底地形近傍の流れの精度を改善するものである。この場合、1つの計算セルの内部に流体領域と海底地形などの固体領域が共存することになる。支配方程式の離散化は、計算セルの流体領域に対して有限体積法を適用することによって行っている。



(a) Step topography



(b) Cut Cell

Fig.1 The representation of a smoothly varying bottom (broken line) in a z-coordinate model.

3.1 有限体積法

ここで、モデルで使われている有限体積法について以下に示すスカラー量 ϕ の保存式を例にして説明する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (5)$$

ここで、 F は ϕ に関するフラックスを表す。

計算セル内の灰色の領域は固体領域を表しており、それ以外が流体領域を表している。海底地形を考慮した計算セルにおける境界面積(A,B,C)と体積(V)の計算方法を付録A.1に記す。

変数配置はMECモデルでは、staggered配置であるが、本モデルでは、計算セル中心に水平速度変数(uc,vc)を加えることによりcollocate配置としている。collocate配置では、格子毎に変数値が激しく変動する計算モードを起しやすくとされるため、海洋モデルでは、計算の安定性が高いstaggered配置を使うことが多い。しかし、staggered配置の場合には、有限体積法を適用する変数が分散配置されるため、変数毎に有限体積法を適用する計算セルを設定し、個別に体積、表面積を評価しなければならず、計算が煩雑になる。本モデルでは、変数がセル中心に集中配置され計算セルを変数同士で共用でき、有限体積法の適用が容易となるcollocate配置を選択した。計算モードを抑制するためMECモデルで使われているstaggered配置された速度変数も併用することとした。本モデルで新しく加えた速度変数(uc,vc)は運動量方程式を、MECモデルで使用される速度変数(u,v,w)は連続の式を満たすものとしている。

3.4 差分式

以下に、移流、圧力及び粘性の各項の具体的な差分式をFig.2に示した計算セルに基づき求める。

3.4.1 移流項

移流項は以下のように、差分表示される。

$$\begin{aligned}
 & adv_term \\
 &= \sum_m (\vec{u} \otimes \vec{u})_m \cdot \vec{n} dS_m \\
 &= [A_{i,j,k} uc_{i,j,k}^{(x)} u_{i,j,k} - A_{i-1,j,k} uc_{i-1,j,k}^{(x)} u_{i-1,j,k} \\
 &+ B_{i,j,k} uc_{i,j,k}^{(y)} v_{i,j,k} - B_{i,j-1,k} uc_{i,j-1,k}^{(y)} v_{i,j-1,k} \\
 &+ C_{i,j,k} uc_{i,j,k}^{(z)} w_{i,j,k} - C_{i,j,k-1} uc_{i,j,k-1}^{(z)} w_{i,j,k-1}] \cdot \vec{i} \\
 &+ [A_{i,j,k} vc_{i,j,k}^{(x)} u_{i,j,k} - A_{i-1,j,k} vc_{i-1,j,k}^{(x)} u_{i-1,j,k} \\
 &+ B_{i,j,k} vc_{i,j,k}^{(y)} v_{i,j,k} - B_{i,j-1,k} vc_{i,j-1,k}^{(y)} v_{i,j-1,k} \\
 &+ C_{i,j,k} vc_{i,j,k}^{(z)} w_{i,j,k} - C_{i,j,k-1} vc_{i,j,k-1}^{(z)} w_{i,j,k-1}] \cdot \vec{j} \\
 & \text{where} \\
 & \begin{cases} \vec{i} : & \text{unit vector pointing to x direction} \\ \vec{j} : & \text{unit vector pointing to y direction} \end{cases} \quad (14)
 \end{aligned}$$

移流項の差分式(14)の上添え字(x),(y)が付いた速度変数は、計算セル中心の速度変数を用いて、それぞれx方向とy方向に3次精度のQUICK (quadratic upstream interpolation for convective kinematics) 補間を適用して

求められる境界面上の速度変数である。例として $uc^{(x)}$ については、補間係数 q を用いて、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 uc_{i,j,k}^{(x)} &= q_{i-2,j,k} uc_{i-2,j,k} + q_{i-1,j,k} uc_{i-1,j,k} \\
 &+ q_{i,j,k} uc_{i,j,k} + q_{i+1,j,k} uc_{i+1,j,k} \quad (15)
 \end{aligned}$$

本モデルは、格子間隔を変化させて用いるvariable meshの使用を想定しており、格子間隔に応じて補間係数を定める必要がある。不等格子間隔の場合のQUICK補間係数の求め方について付録A2を参照されたい。

格子間隔が一定の場合には以下ようになる。

Case 1: $u_{i,j,k} > 0$

$$\begin{aligned}
 uc_{i,j,k}^{(x)} &= -\frac{1}{8} \times uc_{i-2,j,k} + \frac{6}{8} \times uc_{i-1,j,k} \\
 &+ \frac{3}{8} \times uc_{i,j,k} + 0 \times uc_{i+1,j,k} \quad (16a)
 \end{aligned}$$

Case 2: $u_{i,j,k} < 0$

$$\begin{aligned}
 uc_{i,j,k}^{(x)} &= 0 \times uc_{i-2,j,k} + \frac{3}{8} \times uc_{i-1,j,k} \\
 &+ \frac{6}{8} \times uc_{i,j,k} - \frac{1}{8} \times uc_{i+1,j,k} \quad (16b)
 \end{aligned}$$

3.4.2 圧力項

圧力項は以下のように、差分表示される。

$$\begin{aligned}
 & prs_term \\
 &= \sum_m P_m \vec{i} \cdot \vec{n} dS_m \\
 &= [A_{i,j,k} P_{i+\frac{1}{2},j,k} - A_{i-1,j,k} P_{i-\frac{1}{2},j,k} \\
 &+ (A_{i,j,k} - A_{i-1,j,k}) P_p] \cdot \vec{i} \\
 &+ [B_{i,j,k} P_{i,j+\frac{1}{2},k} - B_{i,j-1,k} P_{i,j-\frac{1}{2},k} \\
 &+ (B_{i,j,k} - B_{i,j-1,k}) P_p] \cdot \vec{j} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$P_{i-1/2,k}, P_{i+1/2,k}, P_{i,j-1/2,k}, P_{i,j+1/2,k}$ は、計算セルの境界面上の圧力値を表し、これらの値は、隣り合う計算セル内の値との1次の線形内挿により求められる。また、 P_p は、流体と固体領域の境界面における圧力値を表しており、当該計算セルと隣接する計算セルの圧力値を用いて1次の線形外挿により求められる。その際に当該セルと隣接するセルの中心点を通る鉛直平面内における固体領域境界面の代表点の位置(dx,dz)のみを考慮し、この鉛直平面に垂直な方向の固体領域の位置は考慮しないものとする。以下に、例としてx方向の圧力勾配の求め方を、Fig.3に示す計算セルに基づいて説明する。

